２

山形大学入試問題・前期　　2024.8.12(月)

２０２０年度　数学

（１／１）

【第２問】

点Ｒ（０，５）を中心とする円$\chi^2+(y-5)^2=9$をC，放物線$y=a\chi^2$をDとする。ただし，$a>0$とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 円C上の点$(2\sqrt{2}, 6)$におけるCの接線の方程式を求めよ。

(2) $a=2$とし，放物線D上の点ＰにおけるDの接線をℓとする。ただし，点Ｐは第１象限にあるとする。放物線Dと直線ℓ，およびｙ軸とで囲まれた図形の面積が$\frac{9}{4}$であるとき，点Ｐの座標を求めよ。

(3) 円Cと放物線Dが共有点をちょうど２個もつとき，ａの値を求めよ。

(4) 円Cと放物線Dが異なる４個の共有点をもつとし，$P(s, t)$，$Q(-s, t)$をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは$\angle PRQ=90^\circ$，$s>0$，$t<5$を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

（ｉ）　s，tおよびａの値を求めよ。

★（ⅱ）　円Cの$y\leqq t$の部分と放物線Dで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

【　学習のための基礎資料　】

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第２問の出題項目：微・積分法（数学Ⅱ）

出題内容：円と放物線の共有点，曲線と直線で囲まれた部分の面積

■今回は，第２問のうち(4(ⅱ))のみの解答です。

((1)(2)(3)(4(ｉ))は別ファイルになります。)

■２０２０年度・第２問(4(ⅱ))を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(4(ⅱ))　数学Ⅱ　積分　№１３（１／６），（２／６）　◀定積分と図形の面積（χ軸を使って）

Link：→　積分　｜学習計画書｜

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・**第２問**(3)】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(4(ⅱ))　問題の図的状況は，次のページの図に示す通りです。
S＝(五角形ＰＲＱＩＨ)－(図の斜線部)－(扇形ＲＱＰ)
で面積が求まることは，すぐに分かります。
図形の対称性を考えることで，公式が使えるようになります。
・五角形は，ｙ軸を対称軸とする線対称な台形の面積の２倍です。
・斜線部は，放物線とχ軸およびχ＝０，χ＝ｓとで囲まれた部分の面積の２倍です。定積分を使って求めます。
・扇形は半径３の円の４分の１です。
ａ，ｓ，ｔはそのままで計算し，結果に(ⅰ)で求めた値を代入します。
ａ，ｓ，ｔの値は，問題の方で，あらかじめ(ⅰ)で計算させています。

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この(4(ⅱ))の問題では，
図形の面積を求めるために，ａ，ｓ，ｔの値を求める必要があるのですが，問題の方であらかじめ，(ⅰ)で求めさせてくれています。

【　問　題　】

点Ｒ(０，５)を中心とする円$\chi^2+(y-5)^2=9$をC，放物線$y=a\chi^2$をDとする。ただし，ａ＞０とする。このとき，次の問に答えよ。

(4)　円Cと放物線Dが異なる４個の共有点をもつとし，Ｐ(s，t)，Ｑ($-s$，t)をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは∠ＰＲＱ＝９０°，ｓ＞０，ｔ＜５を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

★　(ⅱ)　円Cの$y\leqq t$の部分と放物線Dで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

［答　　案］

$\boxed{1}$　（Sの求め方を説明する）

２点Ｐ，Ｑからχ軸に垂線ＰＨ，ＱＩを下ろす。
Ｓは五角形ＰＲＱＩＨから，下図の斜線部と半径３で中心角が９０°の扇形を取り除いた部分の面積であるから，図形の対称性を考えて，

S＝(五角形ＰＲＱＩＨ)－(図の斜線部)－(扇形ＲＱＰ)

$$=2\left\{\frac{1}{2}(t+5)s\right\}\qquad-2\int_0^s a\chi^2dx\quad-\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot3^2$$

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問 (4)】　ー〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

ここで，

・$2\left\{\frac{1}{2}(t+5)s\right\}=s(t+5)$

$=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(5-\frac{3\sqrt{2}}{2}+5\right)$　◀（ｉ）のs，tの値を代入する。

$=15\sqrt{2}-\frac{9}{2}$

・$2\int_0^s a\chi^2 dx=2a\left[\frac{1}{3}\chi^3\right]_0^s$　◀a，sの値は積分計算結果に代入する。

$=\frac{2}{3}a(s^3-0)$

$=\frac{2}{3}as^3$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{10-3\sqrt{2}}{9}\cdot\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^3$　◀（ｉ）のa，sの値を代入する。

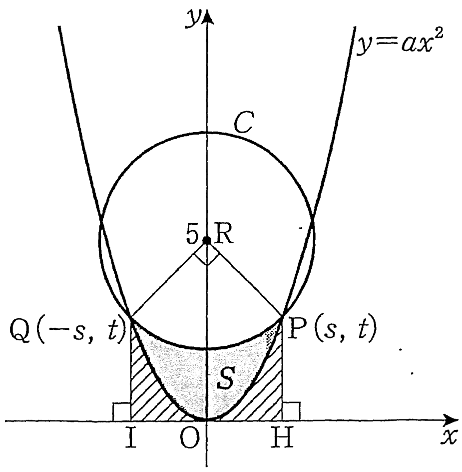
$=\frac{10\sqrt{2}-6}{2}$

$=5\sqrt{2}-3$

・$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 3^2=\frac{9}{4}\pi$

$=15\sqrt{2}-\frac{9}{2}-(5\sqrt{2}-3)-\frac{9}{4}\pi$

$=10\sqrt{2}-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\pi$



2　（答をまとめる）

したがって，求める図形の面積 S は，$S=10\sqrt{2}-\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\pi$