２

山形大学入試問題・前期

2024.8.12(月)

２０２０年度　数学

（１／１）

【第２問】

点Ｒ（０，５）を中心とする円$\chi^2+(y-5)^2=9$をC，放物線$y=a\chi^2$をDとする。ただし，$a>0$とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 円C上の点$(2\sqrt{2}\ ,\ 6)$におけるCの接線の方程式を求めよ。

(2) ａ＝２とし，放物線D上の点ＰにおけるDの接線をℓとする。ただし，点Ｐは第１象限にあるとする。放物線Dと直線ℓ，およびｙ軸とで囲まれた図形の面積が$\dfrac{9}{4}$であるとき，点Ｐの座標を求めよ。

(3) 円Cと放物線Dが共有点をちょうど２個もつとき，ａの値を求めよ。

(4) 円Cと放物線Dが異なる４個の共有点をもつとし，$P(s,\ t)$，$Q(-s,\ t)$をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは$\angle PRQ=90°$，$s>0$，$t<5$を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

★　（ｉ）　s，tおよびａの値を求めよ。

（ii）　円Cの$y\leqq t$の部分と放物線Dで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

【　学習のための基礎資料　】

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第２問の出題項目：微・積分法（数学Ⅱ）

出題内容：円と放物線の共有点，曲線と直線で囲まれた部分の面積

■今回は，第２問のうち(4(ｉ))のみの解答です。

（(1) (2) (3) (4(ii))は別ファイルになります。）

■２０２０年度・第２問(4(ｉ))を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(4(ｉ))　数学Ｉ　関数とグラフ　No.１３（１／１２），（２／１２）　◀3元1次連立方程式の解き方
（５／１２），（８／１２）

Link：→　関数とグラフ　｜学習計画書｜

【注】上の資料は，(4(ｉ))を解くときに使うわけではありませんが，この機会に３元１次連立方程式の解き方をまとめるための資料として使えます。

また，２直線の垂直条件は，数Ⅱ教科書の「点と直線」の単元に載っています。

（次のページへつづく）↗

（前のページからのつづき）

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(4(ｉ))　２点Ｐ(ｓ，ｔ)，Ｑ(－ｓ，ｔ)は

円 $\chi^2+(y-5)^2=9$ と放物線 $y=a\chi^2$ 上にあるので

$$\begin{cases} t=as^2 & \cdots① \\ s^2+(t-5)^2=9 & \cdots② \end{cases}$$

の方程式が作れますが，未知数がａ，ｓ，ｔの３個あるので，これだけでは
この３つの解を求めることができません。もう１本の方程式が必要です。
等式を作るための条件は，必ず問題文の中にあるはずです。

「点Ｐ，Ｑは∠ＰＲＱ＝９０°」

がその条件にあたります。
垂直に交わる直線の傾きの積は－１となるという性質を使うと，３番目の
等式が作れます。
３本の方程式は，次の手順で計算します。

最初に，２元連立方程式で２つの未知数の値を求め，

次にそれらを第３の式に代入して第３番目の未知数の値を求めます。

なお，平方根を取るときには，$s>0$ と $t<5$ という条件を使って正負の値
を選択します。
＊連立方程式なのですが，あまり慣れていない計算問題かもしれません。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この(4(ｉ))の問題では，

(4) のメインの問題は(ⅱ)の積分によって面積を求める問題です。そのためには，問題で
与えられたｓ，ｔ，ａの値が必要です。(ｉ)がそのための誘導問題です。
(ｉ)がなくて，いきなり

「円 *C* の $y \leqq t$ の部分と放物線 *D* で囲まれた図形の面積 *S* を求めよ。」

では，何をしていいのか分かりません。
だから，(ｉ)は出題者の”ご親切”です。
しかし，少し計算が難しいので，ここで”こける”と”ご親切”を無駄にしてしまいます。

（次のページへつづく）

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問 (3)】　－〈３枚目／４枚〉

（前のページからのつづき）

【　問　　題　】

点Ｒ（０，５）を中心とする円 $x^2+(y-5)^2=9$ を C，放物線 $y=ax^2$ を D とする。ただし，$a>0$ とする。このとき，次の問に答えよ。

(4) 円 C と放物線 D が異なる４個の共有点をもつとし，Ｐ$(s,\ t)$，Ｑ$(-s,\ t)$ をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは $\angle PRQ=90°$，$s>0$，$t<5$ を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

★　（ｉ）　s，t および a の値を求めよ。

［答　　案］

1　（s，tの値を求める）

２点Ｐ$(s,\ t)$，Ｑ$(-s,\ t)$ は

円 $x^2+(y-5)^2=9$ と放物線 $y=ax^2$ 上にあるので

$$\begin{cases} t=as^2 & \cdots① \\ s^2+(t-5)^2=9 & \cdots② \end{cases}$$

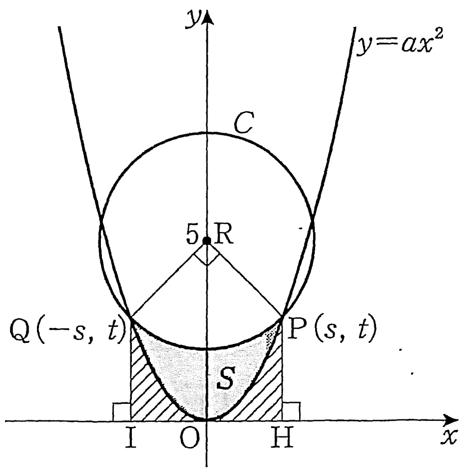
また，$\angle PRQ=90°$ であることから，

直線ＲＰの傾きは，$\dfrac{t-5}{s-0}=\dfrac{t-5}{s}$

直線ＱＲの傾きは，$\dfrac{5-t}{0-(-s)}=\dfrac{5-t}{s}$

より，$\dfrac{t-5}{s}\cdot\dfrac{5-t}{s}=-1$

$(t-5)^2=s^2 \quad \cdots③$



②と③を連立すると，

③を②に代入して，

◀②と③の連立方程式を解く。

$s^2+s^2=9$，　$s^2=\dfrac{9}{2}$，　$s>0$ より　$s=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \quad \cdots④$

④を③に代入して，

$(t-5)^2=\dfrac{9}{2}$，　$t<5$ より　$t-5=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，　$t=5-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \quad \cdots⑤$

2　（aの値を求める）

④と⑤を①に代入して，

$5-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=a\times\dfrac{9}{2}$

$10-3\sqrt{2}=9a$ より，$a=\dfrac{10-3\sqrt{2}}{9} \quad \cdots⑥$

（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

$\boxed{3}$ （答をまとめる）

④と⑤より，$s=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，　$t=5-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

⑥より，$a=\dfrac{10-3\sqrt{2}}{9}$