山形大学入試問題・前期　　2024.8.9(金)

# ２　２０２０年度　数学

（１／１）

## 【第２問】

点Ｒ（０，５）を中心とする円$\chi^2+(y-5)^2=9$を$C$，放物線$y=a\chi^2$を$D$とする。ただし，$a>0$とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 円$C$上の点$(2\sqrt{2}, 6)$における$C$の接線の方程式を求めよ。

(2) $a=2$とし，放物線$D$上の点Ｐにおける$D$の接線を$\ell$とする。ただし，点Ｐは第１象限にあるとする。放物線$D$と直線$\ell$，および$y$軸とで囲まれた図形の面積が$\frac{9}{4}$であるとき，点Ｐの座標を求めよ。

★(3) 円$C$と放物線$D$が共有点をちょうど２個もつとき，ａの値を求めよ。

(4) 円$C$と放物線$D$が異なる４個の共有点をもつとし，$P(s, t)$，$Q(-s, t)$をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは$\angle PRQ=90°$，$s>0$，$t<5$を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

（ｉ） $s$，$t$およびａの値を求めよ。

（ⅱ） 円$C$の$y \leqq t$の部分と放物線$D$で囲まれた図形の面積$S$を求めよ。

## 【　学習のための基礎資料　】

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

| | | |
|---|---|---|
| 人文社会科学部 | 第１，２，３問 | （　９０分） |
| 理学部 | 第１，３，４，５問 | （１２０分） |
| 医学部 | 第１，３，５，６問 | （１２０分） |
| 農学部 | 第１，２，３，４問 | （１２０分） |

★

■第２問の出題項目：微・積分法（数学Ⅱ）
　出題内容：円と放物線の共有点，曲線と直線で囲まれた部分の面積

■今回は，第２問のうち(3)のみの解答です。（(1)(2)(4)は別ファイルになります。）

■２０２０年度・第２問(3)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
　(3) 数学Ⅱ　No.１３ｓ（５／７），（６／７）　　◀放物線と円の共有点・接点
　　Link：→　円と直線　｜学習計画書｜



（次のページへつづく）↗

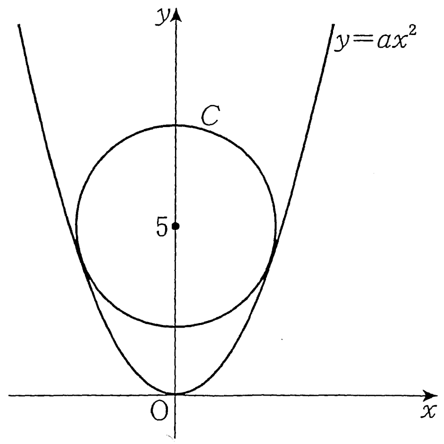
□□ 【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問 (3)】 －〈２枚目／４枚〉

↗ （前のページからのつづき）

【考え方】(3) 「放物線と円の共有点・接点」というジャンルの問題です。

放物線と円の共有点についても，これまで学習した方針
**共有点 ⟺ 実数解　　接点 ⟺ 重解**
で考えます。

この問題では，ａ＞０，ｙ＝ａ$\chi^2$であるから，ｙ≧０の範囲で考えます。
「円Ｃと放物線Ｄが共有点をちょうど２個もつ」
というのは，右の図のような状況をいいます。




・そこで，放物線と円の方程式を連立し，
$\chi$を消去して，ｙの２次方程式

$$y^2+\left(\frac{1}{a}-10\right)y+16=0$$

の解が，正の重解になるときのａの値を求めます。
したがって，
（ｉ）ｙの解が重解になり，かつ
（ii）ｙの解が正になる
ようなａの値を求めることになります。

・（ｉ）では，ｙの判別式をＤとおいて，Ｄ＝０となるａの値を求めます。
（ii）では，$f(y)$ のグラフを考え，$f(y)$ のグラフの軸＞０のとき，
ｙは正の重解（このときは解はただ１つ）をもつことを利用してａの範囲を求めます。
（ｉ）かつ（ii）が求めるａの値になります。

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この (3) の問題では，
(3) の問題も，他のどの問題とも繋がっていない”単発問題”です。山形大学の入試問題の傾向からは，まったく”ずれている”問題です。

**【　問　題　】**

点Ｒ（０，５）を中心とする円$\chi^2+(y-5)^2=9$を$C$，放物線ｙ＝ａ$\chi^2$を$D$とする。ただし，ａ＞０とする。このとき，次の問に答えよ。

★(3) 円$C$と放物線$D$が共有点をちょうど２個もつとき，ａの値を求めよ。

（次のページへつづく） ↗

□□【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問 (3)】－〈３枚目／４枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

$\begin{cases} D：放物線 & y=a\chi^2 & \cdots① \\ C：円 & \chi^2+(y-5)^2=9 & \cdots② \end{cases}$　◀中心R（0, 5）

1　（放物線と円の方程式を連立し，yについての２次方程式を作る）

条件より，$a>0$

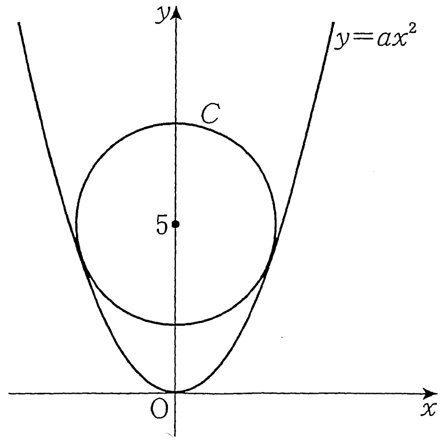
①より，$\chi^2=\frac{1}{a}y$　であり，$y\geqq 0$

これを②にに代入すると，$\frac{1}{a}y+(y-5)^2=9$

これをｙについて整理して，

$$y^2+\left(\frac{1}{a}-10\right)y+16=0 \quad \cdots③$$

◀yの範囲は，$y\geqq 0$




2　（２次方程式が重解をもつためのaの条件を調べる）

放物線①と円②が共有点をちょうど２個もつのは，ｙの２次方程式③が正の重解をもつときである。

◀$a>0$で，$y=a\chi^2$であるから。

③の判別式をＤとすると，$D=0$

$$D=\left(\frac{1}{a}-10\right)^2-4\times1\times16$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{20}{a}+36$$

よって，$\frac{1}{a^2}-\frac{20}{a}+36=0$

$$36a^2-20a+1=0$$

$$(18a-1)(2a-1)=0 \quad \cdots④$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| １８ | ╳ | (－１)→ | －２ |
| ２ | | (－１)→ | －１８　(＋ |
| | | | －２０ |

◀ $a=\frac{1}{18}$，$\frac{1}{2}$　？？？

3　（重解が正であるためのaの条件を調べる）

ここで，重解が正である条件を調べる。　◀ａの値を確定するため。

$$f(y)=y^2+\left(\frac{1}{a}-10\right)y+\left(\frac{\frac{1}{a}-10}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{1}{a}-10}{2}\right)^2+16$$　◀右辺を平方完成

$$=\left(y+\frac{\frac{1}{a}-10}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{1}{a}-10}{2}\right)^2+16$$　◀$f(y)$の標準形

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問(3)】 －〈４枚目／４枚〉

（前のページからのつづき）

$$f(y)=\left(y+\frac{\frac{1}{a}-10}{2}\right)^2-\left(\frac{\frac{1}{a}-10}{2}\right)^2+16$$ （ｙ≧０）のグラフにおいて，

軸の位置を考えると，

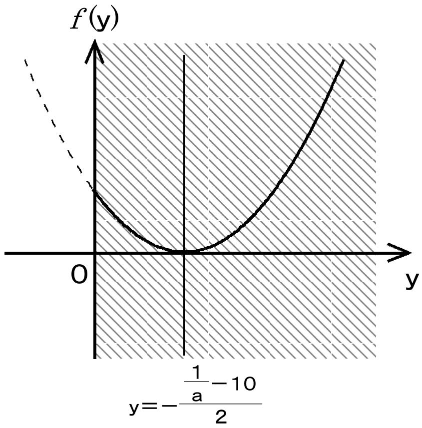
$$\text{軸：}\ y=-\frac{\frac{1}{a}-10}{2}>0$$

$$\frac{1}{a}-10<0$$

$$\frac{1}{a}<10$$

$$1<10a$$

$$\frac{1}{10}<a$$




4 (答をまとめる)

よって，④より，$a=\frac{1}{2}$