２　山形大学入試問題・前期　2024.8.5(月)

２０２０年度　数学

（１／１）

【第２問】

点Ｒ（０，５）を中心とする円$x^2+(y-5)^2=9$をC，放物線$y=ax^2$をDとする。ただし，$a>0$とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 円C上の点$(2\sqrt{2}, 6)$におけるCの接線の方程式を求めよ。

★(2) $a=2$とし，放物線D上の点ＰにおけるDの接線をℓとする。ただし，点Ｐは第１象限にあるとする。放物線Dと直線ℓ，およびｙ軸とで囲まれた図形の面積が$\frac{9}{4}$であるとき，点Ｐの座標を求めよ。

(3) 円Cと放物線Dが共有点をちょうど２個もつとき，ａの値を求めよ。

(4) 円Cと放物線Dが異なる４個の共有点をもつとし，$P(s, t)$，$Q(-s, t)$をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは$\angle PRQ=90^\circ$，$s>0$，$t<5$を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

（ｉ）s，tおよびａの値を求めよ。

（ii）円Cの$y \leqq t$の部分と放物線Dで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

【　学習のための基礎資料　】

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第２問の出題項目：微・積分法（数学Ⅱ）

出題内容：円と放物線の共有点，曲線と直線で囲まれた部分の面積

■今回は，第２問のうち(2)のみの解答です。（(1)(3)(4)は別ファイルになります。）

■２０２０年度・第２問(2)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(1) 数学Ⅱ　微分係数と導関数　No.８（１／４）　◀接線の方程式（接点なし）

Link：→　微分係数と導関数｜学習計画書｜

数学Ⅱ　積分　No.１５（４／８）　◀放物線と接線に囲まれた部分の面積

Link：→　積分｜学習計画書｜

数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(2) この問題は「接点が与えられていない場合の接線の方程式」の問題である。
このタイプの問題は，次の手順で考える。

1 （接線の一般式を作る）

①接点を設定する　（ａ，f(a)）　◀接点がないから作る

②接線の傾きを求める　f'(χ) より，　◀導関数を作って

f'(a)　◀χ＝aにおける接線の傾き

③接線の方程式を作る

ｙ－f(a)＝f'(a)（χ－ａ）

2 （接線の特殊化）

④条件を使ってａの値を求める　◀条件によって問題が型分けされる

あるいは，接点の座標を求める。

＊⑤接線の方程式を作る　◀ここまで問われない問題もある

この問題の2(接線の特殊化)では，接点のχ座標を求めるために，「図形で囲まれた部分の面積を求める」ことを利用する。　◀定積分

面積を求めるのは，この問題では最終目的ではなく，あくまで接点のχ座標を求めるための条件として使うのであるから，この問題は積分の問題ではなく，「接線の方程式の問題」である。

＊答案の組立は，上記基礎教材を参照にすること。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この (1) の問題では，

(2) の問題も，(3) 以降の問題へと繋がっていきません。(1) の問題に続き，山形大学の入試問題としては”変”です。

【　問　題　】

点Ｒ（０，５）を中心とする円χ²＋（ｙ－５）²＝９を *C*，放物線ｙ＝ａχ²を *D*とする。ただし，ａ＞０とする。このとき，次の問に答えよ。

★(2)　ａ＝２とし，放物線 *D*上の点Ｐにおける *D*の接線をℓとする。ただし，点Ｐは第１象限にあるとする。放物線 *D*と直線ℓ，およびｙ軸とで囲まれた図形の面積が $\frac{9}{4}$ であるとき，点Ｐの座標を求めよ。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問 (2)】　－〈３枚目／３枚〉

↗ （前のページからのつづき）

［答　　案］

$f(x)=2x^2$　とする。

$\boxed{1}$ (接線の一般式を作る)

接点の座標を $(t,\ 2t^2)$ とすると，　◀接点がないから作る

$f'(x)=4x$ より，　◀導関数を作って

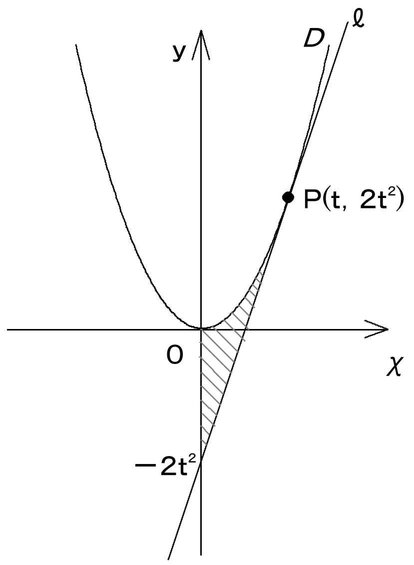
$f'(t)=4t$　◀ $x=t$における接線の傾き

よって，この接点における接線の方程式は，

$y-2t^2=4t(x-t)$　◀ $x=t$とおいたときの接線

$y=4tx-2t^2$

$\boxed{2}$ (接線の特殊化)



放物線Ｄと直線ℓ，およびｙ軸とで囲まれた図形の面積が $\frac{9}{4}$ であるから，

$$\int_0^t\{2x^2-(4tx-2t^2)\}dx=\frac{9}{4}$$

$$2\int_0^t(x-t)^2dx=\frac{9}{4}$$

$$\left[\frac{1}{3}(x-t)^3\right]_0^t=\frac{9}{8}$$

$$\frac{1}{3}t^3=\frac{9}{8}$$

$$t^3=\frac{27}{8}$$

t は正の実数であるから，　$t=\frac{3}{2}$

$\boxed{3}$ (接点の座標)

したがって，$P\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{2}\right)$