山形大学入試問題・前期　2024.8.5(月)

２０２０年度　数学

２

（１／１）

【第２問】

点Ｒ（０，５）を中心とする円$\chi^2+(y-5)^2=9$をC，放物線$y=a\chi^2$をDとする。ただし，$a>0$とする。このとき，次の問に答えよ。

★(1)　円C上の点$(2\sqrt{2},\ 6)$におけるCの接線の方程式を求めよ。

(2)　ａ＝２とし，放物線D上の点ＰにおけるDの接線をℓとする。ただし，点Ｐは第１象限にあるとする。放物線Dと直線ℓ，およびｙ軸とで囲まれた図形の面積が$\frac{9}{4}$であるとき，点Ｐの座標を求めよ。

(3)　円Cと放物線Dが共有点をちょうど２個もつとき，ａの値を求めよ。

(4)　円Cと放物線Dが異なる４個の共有点をもつとし，$P(s,\ t)$，$Q(-s,\ t)$をそのうちの２点とする。また，点Ｐ，Ｑは$\angle PRQ=90^\circ$，$s>0$，$t<5$を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

（ｉ）　s，tおよびａの値を求めよ。

（ii）　円Cの$y\leqq t$の部分と放物線Dで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

【　学習のための基礎資料　】

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２０年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第２問の出題項目：微・積分法（数学Ⅱ）

出題内容：円と放物線の共有点，曲線と直線で囲まれた部分の面積

■今回は，第２問のうち(1)のみの解答です。（(2)(3)(4)は別ファイルになります。）

■２０２０年度・第２問(1)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

(1)　数学Ⅱ　円と直線　No.１２（１／６），（２／６）　◀接線の方程式

No.１２ｓ（１／４）　◀接線の方程式(4つの解き方)

Link：→　円と直線｜学習計画書｜

（次のページへつづく）↗

□□ 【山形大学入試問題・前期　２０２０年度・第２問 (1)】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(1)　「円の接線の方程式」の公式をそのまま適用するだけの問題です。
公式は，円の中心が原点である場合ですが，入試ではそんな基本的な形では出題されません。中心が原点以外にある場合に公式を応用して解く問題です。それにしても簡単な問題です。「点数をどうぞ！」というような親切な問題です。入試対策としては，解答書を見て，「なんだこれでいのか。」でおしまいにしたら，他の人に負けます。「円の接線の方程式」はそんな底の浅いものではありません。次の４種類の解き方があります（詳細は添付資料を参照）。これらの解法の技術は接線の問題のいろいろな場面で使えます。受験対策としては，この４つの解法のすべてを自在に使えるようにしておくことが大切です。

「円の接線の方程式」の求め方
【解き方１】接線の公式の利用
【解き方２】１点と傾きの与えられた直線の方程式の利用
【解き方３】「点と直線の距離＝円の半径」の方程式の利用
【解き方４】接点⇔重解という性質の利用

【山形大学入試出題原理】
山形大学の入試問題の多くは，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が解けるように作問されています。この「入試出題原理」をうまく使いきれるかどうかが正解できるかどうかの分かれ目になります。

■この (1) の問題では，
山形大学の入試問題としてはめずらしく (1) が後の問題の誘導問題にはなっていません。
これは，すべての問題を解いたあとでわかることで，問題を解く途中では，誘導問題になっているかもしれないと，常に (1) の結果を見返しながら解き進めることが大切です。

【　問　題　】

点Ｒ（０，５）を中心とする円 $\chi^2+(y-5)^2=9$ を C，放物線 $y=a\chi^2$ を D とする。ただし，$a>0$ とする。このとき，次の問に答えよ。
★(1)　円 C 上の点 $(2\sqrt{2},\ 6)$ における C の接線の方程式を求めよ。

［答　　案］

円 $\chi^2+y^2=r^2$ 上の点 $(\chi_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，
$\chi_1\chi+y_1y=r^2$　…①

円 $(\chi-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(\chi_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，
$(\chi_1-a)(\chi-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$　…②

◀中心 (a，b) が原点 (0，0) になるようにグラフを平行移動をすることで，①の公式から②の公式を導くことができる。

この問題では，
円の中心の座標は $(a,\ b)=(0,\ 5)$ であるから，
$\chi_1=2\sqrt{2}$，$y_1=6$，$r^2=9$ を，接線の公式②に代入して，
$(2\sqrt{2}-0)(\chi-0)+(6-5)(y-5)=9$
$2\sqrt{2}\chi+y-14=0$