4

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第４問】

等差数列 $\{a_n\}$ が次の２つの式を満たすとする。

$$a_3+a_4+a_5=27$$

$$a_5+a_7+a_9=45$$

初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を S_n とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　初項 a_1 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を n を用いて表せ。

(3)　S_n を n を用いて表せ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{S_{2k-1}}+\frac{1}{S_{2k}}\right)$ を n を用いて表せ。

★(5)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)S_k}$ を n を用いて表せ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第４問の出題項目：数列（数学Ｂ）

出題内容：等差数列とその和，部分分数分解による数列の和

■今回は，第４問のうち(5)のみの解答です。（(1)(2)(3)(4)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第４問(5)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル《学習書》）

(5)　数学Ｂ　いろいろな数列　No.６（１／６）　◀部分分数分解（因数が3個の場合）

数学Ｂ　いろいろな数列　No.６ｓ（１／４）　◀部分分数の和（因数が3個の場合）

Link：→　いろいろな数列　｜学習計画書｜

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。
だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(5)　「あれ？(4) と同じではないの？なんで同じ問題が２題あるんだろうと思いながら，(4) の問題と同じように，S_k を n の式で書きかえます。

「え！？」。ここで，受験勉強の幅の差が出ます。分母が３因数の積の形になっています。「え，３つの積？これって，どうやって部分分数に分けるの？」という人と，「なるほど，(5) は(4) とはここが違うのか。３因数の積の部分分数分解で

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第４問 (5)】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

すね。前２つと後２つに分けて…」と考える人。これは，あきらかに勉強の幅の違いです。部分分数分解を２因数の積までしかやってこない人は，ここで行き詰まります。添付の資料をみて，学習しておきましょう。

さらに，おまけですが，(4) の【考え方】で述べたように，

「途中の共通項のキャンセル後に２項が残るだけでなく，４項が残る場合にも正しく処理できる計算方法」もマスターしておきましょう。以下に紹介する(5) の答案は４項が残る場合にも，自動的に正しく処理できる方法で計算しています。この方法で計算すると，自分で注意していなくても，式が自動的に４項を残してくれるのです。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題は，解答の流れを設問できちんと設定してくれています。
これを 山形大学入試出題原理 といいます。（勝手にそのように呼んでいるだけですが…）
前の問の結果を使うことで後の問が解けるように問題が作られています。
記述式”共通テスト”のようなものです。

この第４問では…

(1) は(2) の導入問題，(1)と(2) は(3) の導入問題，(3) は(4)と(5) の導入問題という問題構成になっています。「これを使って次の問題を解いてね」と次々と教えてくれています。実に親切な問題です。

［答　　案］

数列 $\{a_n\}$ の公差を d とする。

★(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)S_k}$ を n を用いて表せ。

(3) より，$S_n=n(n+2)$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)S_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

◀部分分数分解の準備の形にする。

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

◀部分分数分解／(k＋2)－k＝2
差のΣを，Σの差の形に変形する。

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}+\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}+\cancel{\frac{1}{3\cdot4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}\right.$$
$$\left.-\left(\cancel{\frac{1}{2\cdot3}}+\cancel{\frac{1}{3\cdot4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n(n+1)}}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right\}$$

◀中間部分が一気に消える！

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第４問 (5)】　－〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}$$ ◀通分

$$=\frac{n^2+3n+2-2}{4(n+1)(n+2)}$$ ◀分子を展開する。

$$=\frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)}$$ ◀分子の同類項を集める。

$$=\underline{\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}}$$ ◀分子は分母に揃えて因数分解の形にしておく。

【注】ここで用いた部分分数分解のしかたは，途中の項をキャンセルした後，２項だけではなく，４項残る場合にも，注意していなくても，自動的に４項が残る計算方法です。
応用範囲が最も広い部分分数分解の計算方法といえます。
”差のΣを，Σの差”に書きかえて計算する方法です。