



山形大学入試問題・前期

2021年度 数学

(1/1)

## 【第4問】

等差数列  $\{a_n\}$  が次の2つの式を満たすとする。

$$a_3 + a_4 + a_5 = 27$$

$$a_5 + a_7 + a_9 = 45$$

初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  を  $S_n$  とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 初項  $a_1$  を求めよ。
- (2) 一般項  $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。
- (3)  $S_n$  を  $n$  を用いて表せ。

★ (4)  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{S_{2k-1}} + \frac{1}{S_{2k}} \right)$  を  $n$  を用いて表せ。

(5)  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)S_k}$  を  $n$  を用いて表せ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2021年度・数学)は、第1問から第6問までであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部 第1, 2, 3問 (90分)

理学部 第1, 3, 4, 5問 (120分)

医学部 第1, 3, 5, 6問 (120分)

農学部 第1, 2, 3, 4問 (120分)

★

■第4問の出題項目：数列(数学B)

出題内容：等差数列とその和，部分分数分解による数列の和

■今回は、第4問のうち(4)のみの解答です。(1)(2)(3)(5)は別ファイルになります。)

■2021年度・第4問(4)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル《学習書》)

(4) 数学B いろいろな数列 No.6(1/6), (3/6) ◀部分分数分解/部分分数の和

Link: → いろいろな数列 | [学習計画書](#) |

\*数専ゼミの高校数学教材は、山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(4) 所与の条件からは何も見えないので、まず、(3)の結果を使って、 $S_{2k-1}$  と  $S_{2k}$  を  $n$  の式で書きかえてみます。これで、問題は”部分分数分解”をせよ、という意味だと読み取れます。後は、部分分数分解の公式を使った計算問題になります。答案の部分でも書いてありますが、ここでは、途中の共通項のキャンセル後に2項が残るだけでなく、4項が残る場合にも正しく処理できる方法で計算しています。

(次のページへつづく) ↗

## □ □ 【山形大学入試問題・前期 2021年度・第4問(4)】 - 〈2枚目/3枚〉

➡ (前のページからのつづき)

## 【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題は、解答の流れを設問できちんと設定してくれています。  
これを 山形大学入試出題原理 といいます。(勝手にそのように呼んでいるだけですが…)  
前の問の結果を使うことで後の問が解けるように問題が作られています。  
記述式”共通テスト”のようなものです。

この第4問では…

(1) は (2) の導入問題, (1) と (2) は (3) の導入問題, (3) は (4) と (5) の導入問題  
という問題構成になっています。「これを使って次の問題を解いてね」と次々と教  
えてくれています。実に親切な問題です。

[答 案]

数列  $\{a_n\}$  の公差を  $d$  とする。

★(4)  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{S_{2k-1}} + \frac{1}{S_{2k}} \right)$  を  $n$  を用いて表せ。

(3) より,  $S_n = n(n+2)$  であるから,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{S_{2k-1}} + \frac{1}{S_{2k}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{(2k-1)(2k-1+2)} + \frac{1}{2k(2k+2)} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{4k(k+1)} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad \dots (A) \end{aligned}$$

◀  $n=2k-1$  を代入  
 $n=2k$  を代入

◀ 部分分数分解の前処理

◀ 前項, 後項をそれぞれ部分分数分解

$$\begin{aligned} (2k+1) - (2k-1) &= 2 \\ (k+1) - k &= 1 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

◀ 差の  $\Sigma$  を,  $\Sigma$  の差の形に変形する。

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \\ &\quad - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

◀ 中間部分が一気に消える!

(次のページへつづく) ➡

## □ □ 【山形大学入試問題・前期 2021年度・第4問(4)】 - 〈3枚目/3枚〉

➔ (前のページからのつづき)

$$= \frac{2n+1-1}{2n+1}$$

◀ 通分

$$= \frac{2n}{2n+1} \quad \dots \textcircled{1}$$

また,

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$$

◀ 差のΣを, Σの差の形に変形する。

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$$

◀ 中間部分が一気に消える!

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-1}{n+1}$$

◀ 通分

$$= \frac{n}{n+1} \quad \dots \textcircled{2}$$

①と②を(A)に代入して,

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{S_{2k-1}} + \frac{1}{S_{2k}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad \dots (A)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{n}{2n+1} + \frac{n}{4(n+1)}$$

$$= \frac{4n(n+1) + n(2n+1)}{(2n+1)4(n+1)}$$

$$= \frac{4n^2 + 4n + 2n^2 + n}{(2n+1)4(n+1)}$$

◀ 分子を展開する。

$$= \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)4(n+1)}$$

◀ 分子の同類項を集める。

$$= \frac{n(6n+5)}{4(n+1)(2n+1)}$$

◀ 分子は分母に揃えて因数分解の形にしておく。

【注】ここで用いた部分分数分解のしかたは, 途中の項をキャンセルした後, 2項だけではなく, 4項残る場合にも, 注意していなくても, 自動的に4項が残る計算方法です。応用範囲が最も広い部分分数分解の計算方法といえます。  
”差のΣを, Σの差”に書きかえて計算する方法です。