2

山形大学入試問題・前期　　2024.6.4(火)

２０２１年度　数学

(１／１)

【第２問】

放物線 $y=\frac{1}{2}\chi^2-2\chi+3$ を C とし，C 上に点P$\left(a,\ \frac{1}{2}a^2-2a+3\right)$ がある。ただし，０＜ａ＜３とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 放物線 C 上の点Pにおける接線 L_1 の方程式をａを用いて表せ。

(2) 点Pを通り，傾きが１の直線 L_2 の方程式をａを用いて表せ。

(3) 放物線 C，直線 L_1 およびｙ軸で囲まれた図形の面積 S_1 をａを用いて表せ。

★(4) 放物線 C と直線 L_2 で囲まれた図形の面積 S_2 をａを用いて表せ。

(5) $S_1=2S_2$ となるａの値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(２０２１年度・数学)は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第２問の出題項目：微・積分法（数学Ⅱ）

出題内容：放物線と直線で囲まれた部分の面積

■今回は，第２問のうち(4)のみの解答です。（(1)(2)(3)(5)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第２問(4)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル《学習書》）

(4) 数学Ⅱ　積分　No.１４(１／５)　◀放物線と直線間の面積

積分　No.６(１／１０)　◀$-\frac{1}{6}$ の公式

Link：→　積分｜学習計画書｜

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，山形大学の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(4) 何の変哲もない，ただ放物線と直線に囲まれた部分の面積を求める定積分の問題です。公式通り，「上－下のインテグラル」で式を立て，定積分を計算して答を求めます。「下」は条件で与えられているし，「上」は(2) の結果を使います。難しいというよりも，一手間多くかかるのが，χ の座標が文字式で出てくるのでその大小関係を策定しておく必要があることです。これに気づかないと先へ進めません。つまり，ａと６－ａのどちらをインテグラルの上端，下端にするかを決めておかなければならないのですね。しかし，問題文中に０＜ａ＜３というのがあるので，「この条件は，何をせよといっているのだろう？」と考えると分かり

（次のページへつづく）↗

□□ 【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第２問 (4)】 －〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

ます。面積を求める積分計算は$-\frac{1}{6}$の公式が使えるのでずっと楽にできます。
ただし，この公式を使えるということを見抜くことと，使えるように式変形できるということが前提となります。ここでもａと６－ａの大小関係を策定しないとこの公式を正しく使うことができません。
すなわち，０＜ａ＜３という条件が全体の解答の流れをつくるときのキーになっていることがおわかりいただけたと思います。

【山形大学入試出題原理】

山形大学の入試問題は，解答の流れを設問できちんと設定してくれています。
これを 山形大学入試出題原理 といいます。（勝手にそのように呼んでいるだけですが…）
前の問の結果を使うことで後の問が解けるように問題が作られています。
記述式”共通テスト”のようなものです。

この (4) の問題では…
放物線と直線に囲まれた部分の面積を求めるとき，直線L_2の方程式については (2) の結果を使いますよ，と教えてくれております。

［答　　案］

★(4) 放物線 Cと直線 L_2 で囲まれた図形の面積 S_2を ａ を用いて表せ。

$\boxed{1}$　（グラフの交点のχ座標を求める）　◀定積分の両端を求めるために。

放物線 Cと直線 L_2の交点のχ座標は，
条件と (2) より，

$$\frac{1}{2}\chi^2-2\chi+3=\chi+\frac{1}{2}a^2-3a+3$$
$$\chi^2-4\chi=2\chi+a^2-6a$$
$$\chi^2-6\chi-a(a-6)=0$$
$$(\chi-a)(\chi+a-6)=0$$
$$(\chi-a)\{\chi-(6-a)\}=0$$
$$\chi=a,\ 6-a$$

◀
$$\begin{array}{cc|l} 1 & -a & =-a \\ 1 & a-6 & =a-6\ (+ \\ \hline & & -6 \end{array}$$

$\boxed{2}$　（面積を求める）

・放物線 Cの方程式は，条件より，　$y=\frac{1}{2}\chi^2-2\chi+3$

・直線 L_2の方程式は，(2) より，　$y=\chi+\frac{1}{2}a^2-3a+3$

ここで，条件$0<a<3$より，
$$0>-a>-3$$
$$-3<-a<0$$
$$3<6-a<6$$
で，$a<6-a$であるから，　◀aと6－aの大小関係（重要な条件である）

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第２問 (4)】 －〈３枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

$$S_2=\int_a^{6-a}\left\{\chi+\frac{1}{2}a^2-3a+3-\left(\frac{1}{2}\chi^2-2\chi+3\right)\right\}dx \quad \cdots①$$

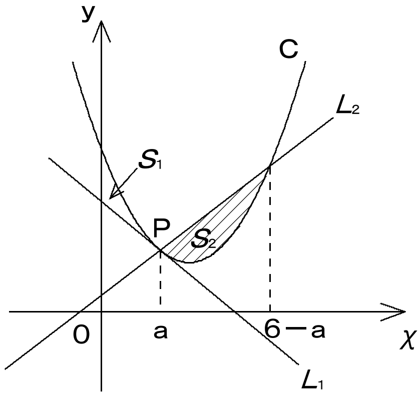
ここで，｛　｝の中を計算して，

$$\chi+\frac{1}{2}a^2-3a+3-\left(\frac{1}{2}\chi^2-2\chi+3\right)$$

$$=\chi+\frac{1}{2}a^2-3a+3-\frac{1}{2}\chi^2+2\chi-3$$

$$=-\frac{1}{2}\chi^2+3\chi+\frac{1}{2}a^2-3a$$

$$=-\frac{1}{2}(\chi^2-6\chi-a^2+6a)$$



ここで，（　）の中を因数分解して，

$$\chi^2-6\chi-a^2+6a$$

$$=\chi^2-6\chi-a(a-6)$$

$$=(\chi-a)(\chi+a-6)$$

$$=(\chi-a)\{\chi-(6-a)\}$$

◀ 1 ╳ −a ＝−a
　1 　 a−6＝a−6 (+
　　　　　　　 −6

◀ $-\frac{1}{6}$ の公式を使うための式変形

$$=-\frac{1}{2}(\chi-a)\{\chi-(6-a)\}$$

よって，①は次のように変形できる。

$$S_2=-\frac{1}{2}\int_a^{6-a}(\chi-a)\{\chi-(6-a)\}dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{6}(6-a-a)\right\}^3$$

◀ $-\frac{1}{6}$ の公式の利用

$$=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{6}\cdot 2^3(3-a)^3\right\}$$

$$=\underline{\frac{2}{3}(3-a)^3}$$