

賢い子に育てよう(2)

2024. 5. 29 (水)

「賢い子に育てる」とは、具体的には、どのように指導することか。
割合の問題を解くときの思考プロセスを分析することで、“賢い”意味を考えてみます。

公式の適用で解くと、なぜいけないのか？

割合や速さや濃度のような複数個の公式がある場合には、公式を知っているだけでは、どのようなとき、どの公式を使ったらいかがわかりません。

だから、次のような間違いが頻発します。

★文部科学省 平成21年度全国学力・学習状況調査 算数A 対象6年

ある会場に小学生が集まりました。

集まった小学生200人のうち80人が女子でした。

女子の人数の割合は、集まった小学生の人数の何%ですか。下の1から4までの中から1つ選んで、その番号をかきましょう。

1 0.4% 2 2.5% 3 40% 4 80%

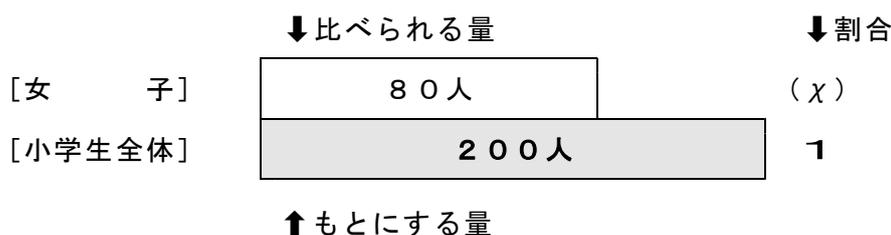
4割の6年生がまちがい、最も多かったのが2であったと報告されています。
 $200 \div 80 = 2.5$ と考えたものだろうと分析されています。

割合の本質(思考力)を使って解いてみる

これを割合の本質についての知識を使って解いてみましょう。

「～女子の人数の割合は、集まった小学生の人数の何%…」という文章から集まった小学生の人数がもとにする量にあたり、割合を求める問題だから、構造図は次のようかけます。

(第1用法)



第1用法では、割合と比べられる量ともとにする量の関係は、

「2 Lを1とみると6 Lは3にあたる」という具体的関係で現象しており、次の構造図で表すことができます。



この図では、比べられる量を上に、もとにする量を下に書き、割合を（ ）内 に書き入れるルールにしています。このように書き入れると、（ ）は上÷下で求めることができます。これは、公式などとして覚える必要はありません。

図から $6 \div 2 = 3$ という関係は読み取れます。これは、このルールで書き入れたときの割合と比べられる量ともとにする量の間になり立っている一般的＝本質的關係だから、あらゆる具体的な場面で現象します。

だから、上の問題でも割合と比べられる量ともとにする量は、このような関係として現象しているはずだから、次の式で割合を求めることができます。

$$(\text{式}) \quad 80 \text{人} \div 200 \text{人} = 0.4 \quad 0.4 \times 100 = 40 (\%)$$

答 3

ここでも、教科書の公式を1つも使わず解きました。

もちろん、公式などいつでもただちに作れることはいうまでもありません。

思考力はだれにも学べる

思考力とは、対象の一般的関係、本質的關係についての知識でした。

知識だからだれでも習得できます。

上で紹介した割合の本質について、理解できないところなどなかったはずです。

つまり、思考力というものをこのような意味でとらえると、だれにでも思考力は身につけることができるはずです。

割合だけではなく、速さ、密度、濃度、利率…など、数学のあらゆる概念にはこのような本質的連関として理解することができ、それについての知識を身につけることによってその概念に関するあらゆる複雑で、高度な問題を解くことができるようになります。

思考力をささえる概念の構造図

本質は、言葉だけでおさえようとする、公式主義に陥ってしまいます。

割合の概念をうまく使えたのは、実は上のような概念の本質的構造を視覚的に現象させる構造図を使ったからです。

このような概念の本質的連関を表す構造図をシェーマといいます。シェーマはそれぞれの概念

で固有のものをもっています。

割合のシェーマ（これは「テープ図といわれます」）、速さのシェーマ（これは「水そう図」といわれます）、単位のシェーマ（これは「単位のものさし」といわれます）等々。

そういえば、確率における樹形図や集合におけるベン図などもシェーマなのでしょうね。

あるいは、図ではないのですが、思考の流れをフォーム化した合同の証明フォームもシェーマの一種かもしれません。フォームに従ってデータを入れていくだけで証明が完成しますから…。

しかしシェーマは、そんな多くあるわけではなく、小学校、中学校を通して10個はないと思われれます。（どんどん開発されるので今後は増えるかもしれませんが）

「くもわ」を使う思考の危険性

同じ図であっても、「くもわ」は割合の概念の構造を視覚的に表しているわけではありません。

「くもわ」からは割合の概念が見えません。見えるのは記号化された「公式」だけです。

だから、割引や割増しのような複雑な問題は、「くもわ」では解けません。

「くもわ」で割合の問題を解いている生徒が、割引や割増しの問題を解けないのは、このような理由が存在するからです。

能力の問題ではなく、問題を解くときに使っている知識の問題なのです。

「くもわ」が割合の問題を解けなくする危険な解き方であることを説明した資料(Essay_783より抜粋)をこの記事の最後に添付しておきます。

いいことだけではありません

割合の問題を解かせると、テープ図をかかない生徒がでます。必ず…。必ず出ます。

もちろん、答案用紙のはしっこに「くもわ」をかいています。

テープ図をかかなくてもフォームがかいてあっても無視して答案をかきます。

「教育では、個性（オリジナリティー）を尊重するのが…」のような建前論を言っているとその生徒の数学的能力は行き詰まります。つい、強制的にテープ図をかかせます。

次の週には、その生徒は授業に現れませんでした。

お母さんの話では、「学校の教え方とちがうから。」ということで退塾しました。

そうです。学校では「くもわ」とか「はじき」を教えているのです。

それを知ったとき、愕然としました。

文章題の解けない生徒を、学校が日々”生産”していたのです。

まったく逆というか、次元のことなる場合があります。

およそ、算数・数学について、学校で3本の指にはいるほど数学的能力のある生徒の場合です。

じ〜っと問題をにらんでいると、いきなり答えを書きます。

もちろん、正解です。

さて、この場合は、どのような指導をしたものか…

現在では、何も言わないことにしています。

でも、ときどき、不思議な質問をしてることがあります。

自分の書いた正解の答えをもってきて、

「せんせ、どうしてこんな答えになるのですか？」
その場合に限り、テープ図を使って説明します。
図ができるかできないうちに、「わかった」といって自分の席に戻ります。
割合の本質とか構造（テープ図）は深く理解しているのですね。

本質(思考力)は学び取ることができる

まとめです。
割合には3タイプの問題があり、それぞれ使う公式もちがいます。また、その応用として割り引き、割増しの問題もあります。
ところが、
「2Lを1とみると6Lは3にあたる」という具体的＝一般的関係とシェーマを使うことで割合のすべての問題を1つの解き方で解くことができます。
また、このシェーマをすこし変形することで、割引、割増しの問題も解くことができます。
これは、ものすごい応用範囲の広い考え方と言えます。「応用力」のことです。
応用力を身につけることは、算数・数学の学習の目標のひとつでもあります。

数専ゼミは、このような図を使った一般的な解法を教えることによって応用力のある質の高い数学的能力を育てることを指導目標とする数学専門塾です。

「応用力のある質の高い数学的能力を育てる」とは、割合の問題について具体的にいえば、「割合の本質を使って割合の問題を解く知識を教える」ということです。
何か特別な思考力を育てる難しい問題をやらせるのではありません。上に示したように、ごくふつうの図を使って問題を解く知識を教えてあげるだけなのです。
だれでも覚えることができます。
だれでも本質を使って問題を解く”知識”を習得できます。

いま習っている塾の数学の指導法と比べてみてください。
公式に数値をあてはめるだけで文章題を解く指導など受けていませんね。

【注】他の塾で数学を習っていても数専ゼミでも数学を習っている人が増えています。他の塾では教えてもらえない質の高い応用力のある数学の思考力を身につけたいためだそうです。

「思考力」が学べる数専ゼミの数学教室です。

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp

■「くもわ」が割合の問題を解けなくする危険な解き方であることの説明■

(Essay_783より抜粋)

なぜ「割合」の問題が解けないのか -「は・じ・き」が「割合」の問題を解けなくしている-

さらに、「速さ」の「は・じ・き」は、「割合」の問題を解けなくしてしまいます。

「速さ」の「は・じ・き」にあたるのが「割合」の「く・も・わ」です。

「く=比べられる量, も=基にする量, わ=割合」という意味です。

問題【3】2mの4分に対する割合は[]です。

答案: 「く=2m, も=4分, わ=?」だから, $2 \times 4 = 8$ 答 [8]

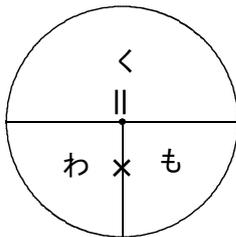
しかし, 4分で2mですから, 1分あたりでは0.5mのはずです。

「く・も・わ」を使って解いている人は, このまちがいが説明できません。

説明できるはずがないのです。「く・も・わ」の図がまちがっているのですから…。

「は・じ・き」の構造から類推すると, 「く・も・わ」の図の構造も右のようにしかならないのですが, 実は, 正しい「く・も・わ」の図は, 下のようなものです。

【正しい「く・も・わ」】



「く・も・わ」を使っている人は, なぜこの図のような順で「く, も, わ」を書き入れると「割合」の式を正しく立てることができるかなどは知りませんから, 「く, も, わ」の位置をまちがえて覚えると”アウト”です。図の構造通りに立式すると間違えます。「は・じ・き」の【考え方】からすれば, 「く・も・わ」の図は, 右上のようにしかならないのですから…。

【注】速さの問題を解くときに生徒が使っている「は・じ・き」とは何か, それがなぜ速さの問題を解けなくする危険な【考え方】であるのかについては, Essay_783で詳しく説明しております。

