３

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第３問】

平面上の△ＡＢＣにおいてＡＢ＝７，ＢＣ＝８，ＣＡ＝６とする。辺ＡＢを２：１に内分する点をＤ，辺ＢＣを１：３に内分する点をＥ，線分ＡＥと線分ＣＤの交点をＰとする。点Ａから辺ＢＣに下ろした垂線と辺ＢＣの交点をＨとする。さらに，辺ＢＣの垂直二等分線が線分ＡＥと交わる点をＱとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。
(2)　△ＡＢＣの面積を求めよ。
(3)　線分ＡＥの長さを求めよ。
(4)　$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AE}$ を用いて表せ。
(5)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
★(6)　線分ＰＱの長さを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第３問の出題項目：ベクトル（数学Ｂ／２０２４年度からは数学Ｃ）

出題内容：平面ベクトル

■今回は，第３問のうち(6)のみの解答です。（(1)(2)(3)(4)(5)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第３問(6)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル《学習書》）

(6)　数学Ｂ　ベクトルと図形　No.１（１／８）～（３／８）　◀内分点の位置ベクトル
　　数学Ｂ　ベクトルと図形　No.３（１／５），（２／５）　◀共線条件
　　数学Ｂ　ベクトルと図形　No.６（２／５）　◀三角形の垂心

これらの教材を学習してから入試問題（第３問(6)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(6)　ＰＱの長さを求めるのですが，Ｐ，Ｑともに線分ＡＥ上にあります。
このことと，ＡＥの長さが(3) の結果としてわかっているので，
$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}|$ とＡを基点とするベクトルに書きかえ，，$\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AE}$ で表すことを考えます。
$\overrightarrow{AP}$ は(4) の結果をそのまま使い，$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AE}$ で表すことへ向かいます。
Ｑは線分ＡＥ上の点から共線条件を使って $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AE}$　と表せるから，
ここでは，ｋの値を求めます。ｋについての方程式が作れればいいので，
内積＝０がどこかで使えないかを調べます。
。　ＱＭ⊥ＢＣより，$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ が使えます。
ベクトルを点Ａを基点とする位置ベクトルで表すことで，条件として与えられたベクトルの大きさを利用することができます。
これで，解法の全体の流れはわかりました。ディテールは答案をご覧下さい。

★

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

この問題では，(3) の結果からＡＥの値を，
(4) の結果から $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AE}$ で表すことを利用します。

［答　　案］

★(6) 線分ＰＱの長さを求めよ。

0　（定義と方針）

$PQ=|\overrightarrow{PQ}|$

$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}|$　…①　　◀Ａを基点とした位置ベクトルで表す。

(3) より，$AE=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ がわかっているので，①において，$\overrightarrow{AQ}$ と $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AE}$ で表す。

1　（$\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AE}$ で表す）

(4) より，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{8}{11}\overrightarrow{AE}$　…②

2　（$\overrightarrow{AQ}$ を $\overrightarrow{AE}$ で表す）

・点Ｑは直線ＡＥ上にあるから，

$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AE}$　…③　　◀共線条件

$\overrightarrow{AQ}=k\left(\dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}\right)$　　◀条件より，ＥはＢＣを１:３に内分する点。

$=\dfrac{3}{4}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{k}{4}\overrightarrow{AC}$　（ｋは実数）　　◀Ａを基点とした位置ベクトルで表す。

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第３問 (6)】 ー〈３枚目／３枚〉

↗ （前のページからのつづき）

・ここで，ｋの値を求める。 ◀内積＝0で，ｋについての方程式が作れる。

ＱＭ⊥ＢＣより，$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ であるから，

$$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AQ}$$ ◀Aを基点とした位置ベクトルで表す。

$$=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}-\left(\frac{3}{4}k\overrightarrow{AB}+\frac{k}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$ ◀MはBCの中点

$$=\frac{2-3k}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$$ ◀Aを基点とした位置ベクトルで表す。

より，

$$\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2-3k}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$$

$$(3k-2)|\overrightarrow{AB}|^2-2k\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+(2-k)|\overrightarrow{AC}|^2=0$$ ◀(2−3k)−(2−k)=−2k

ここで， ◀条件の確認

$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\overrightarrow{AC}|=6$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{21}{2}$ ◀(1) より

であるから，

$$(3k-2)\cdot 7^2-2k\cdot\frac{21}{2}+(2-k)\cdot 6^2=0$$

$$49(3k-2)-21k+72-36k=0$$

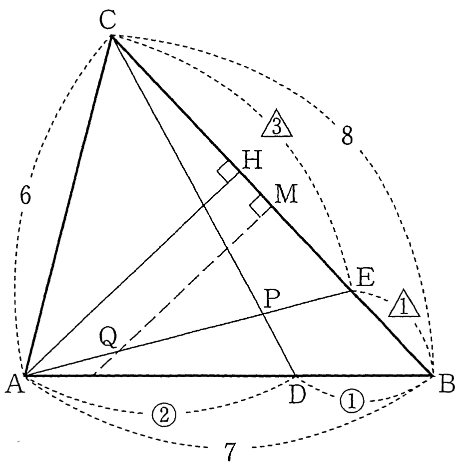
$$147k-98-21k+72-36k=0$$

$$90k=26$$

$$k=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}$$

・これを③に代入して，

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{13}{45}\overrightarrow{AE}\quad\cdots④$$



3 （PQの長さを求める）

②と④を①に代入して，

$$|\overrightarrow{PQ}|=\left|\frac{13}{45}\overrightarrow{AE}-\frac{8}{11}\overrightarrow{AE}\right|$$ ◀Aを基点とした位置ベクトルで表す。

$$=\frac{217}{495}|\overrightarrow{AE}|$$

$$=\frac{217}{495}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{2}$$ ◀(3) より，$|\overrightarrow{AE}|=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

$$=\frac{217\sqrt{15}}{330}$$

よって，線分ＰＱの長さは，$\dfrac{217\sqrt{15}}{330}$