



山形大学入試問題・前期

2021年度 数学

(1/1)

【第3問】

平面上の $\triangle ABC$ において $AB=7$, $BC=8$, $CA=6$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を D , 辺 BC を $1:3$ に内分する点を E , 線分 AE と線分 CD の交点を P とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。さらに, 辺 BC の垂直二等分線が線分 AE と交わる点を Q とする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (3) 線分 AE の長さを求めよ。
- (4) \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{AE} を用いて表せ。

★(5) \overrightarrow{AH} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} を用いて表せ。

- (6) 線分 PQ の長さを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2021年度・数学)は, 第1問から第6問まであり, 学部に応じて, 次のように解答することが求められております。

人文社会科学部 第1, 2, 3問 (90分)

理学部 第1, 3, 4, 5問 (120分)

医学部 第1, 3, 5, 6問 (120分)

農学部 第1, 2, 3, 4問 (120分)

★

■第3問の出題項目: ベクトル(数学B/2024年度からは数学C)

出題内容: 平面ベクトル

■今回は, 第3問のうち(5)のみの解答です。(1)(2)(3)(4)(6)は別ファイルになります。)

■2021年度・第3問(5)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル《学習書》)

- | | |
|-----------------------------------|-------------------|
| (5) 数学B ベクトルと図形 No.5 (1/7), (2/7) | ◀直線上の点の位置ベクトルの表し方 |
| 数学B ベクトルと図形 No.6 (2/5) | ◀三角形の垂心 |

これらの教材を学習してから入試問題(第3問(5))を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

*数専ゼミの高校数学教材は, 山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから, この教材を学び切ることで, 医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(次のページへつづく) →

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2021年度・第3問(5)】 - 〈2枚目/2枚〉

➤ (前のページからのつづき)

【考え方】(5) HはBC上の点だから、点Hの位置ベクトルは、

$$\vec{AH} = s\vec{AB} + (1-s)\vec{AC} \text{ と表せる。}$$

$$AH \perp BC$$

$$\vec{AH} \perp \vec{BC}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$$

◀ 垂直 ⇔ 内積=0

$$\vec{AH} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$$

◀ 基点がAのベクトルに書きかえる

より、sについての方程式が作れるので、sを求める。

垂心の位置ベクトルを求める問題の特殊形である。

[答 案]

★(5) \vec{AH} を \vec{AB} と \vec{AC} を用いて表せ。

1 (求めるベクトルを定義する)

$$\vec{AH} = s\vec{AB} + (1-s)\vec{AC} \text{ とする。}$$

◀ 直線上の点の位置ベクトル(HはBC上の点)だから。

2 (sの値を求める)

$$AH \perp BC$$

$$\vec{AH} \perp \vec{BC}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$$

◀ 垂直 ⇔ 内積=0 : sを求める方程式が作れる。

$$\vec{AH} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$$

◀ 基点がAの位置ベクトルに書きかえる。

$$\{s\vec{AB} + (1-s)\vec{AC}\} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) = 0$$

$$s\vec{AB} \cdot \vec{AC} - s|\vec{AB}|^2 + (1-s)|\vec{AC}|^2 - (1-s)\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

◀ 左辺を展開する。

◀ 条件の確認

◀ (1) より

ここで、

$$|\vec{AB}| = 7, |\vec{AC}| = 6, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{21}{2}$$

であるから、

$$s \cdot \frac{21}{2} - s \cdot 7^2 + (1-s) \cdot 6^2 - (1-s) \cdot \frac{21}{2} = 0$$

両辺×2

$$21s - 98s + (1-s) \cdot 72 - (1-s) \cdot 21 = 0$$

$$-77s + 72 - 72s - 21 + 21s = 0$$

$$-128s + 51 = 0$$

$$s = \frac{51}{128}, \quad 1-s = 1 - \frac{51}{128} = \frac{77}{128}$$

3 (答をまとめる)

よって、

$$\vec{AH} = \frac{51}{128}\vec{AB} + \frac{77}{128}\vec{AC}$$

