



山形大学入試問題・前期

2021年度 数学

(1/1)

【第3問】

平面上の $\triangle ABC$ において $AB=7$, $BC=8$, $CA=6$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を D , 辺 BC を $1:3$ に内分する点を E , 線分 AE と線分 CD の交点を P とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。さらに, 辺 BC の垂直二等分線が線分 AE と交わる点を Q とする。このとき, 次の問に答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ を求めよ。(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。★(3) 線分 AE の長さを求めよ。(4) \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{AE} を用いて表せ。(5) \overrightarrow{AH} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} を用いて表せ。(6) 線分 PQ の長さを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2021年度・数学)は, 第1問から第6問まであり, 学部に応じて, 次のように解答することが求められております。

人文社会科学部 第1, 2, 3問 (90分)

理学部 第1, 3, 4, 5問 (120分)

医学部 第1, 3, 5, 6問 (120分)

農学部 第1, 2, 3, 4問 (120分)

★

■第3問の出題項目: ベクトル(数学B/2024年度からは数学C)

出題内容: 平面ベクトル

■今回は, 第3問のうち(3)のみの解答です。((1) (2) (4) (5) (6) は別ファイルになります。)

■2021年度・第3問(3)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル《学習書》)

(3) 数学B ベクトルと図形 No.1 (1/8)~(3/8)

◀内分点の位置ベクトル

数学B ベクトルとその演算 No.24 (1/4)

◀ベクトルの和の大きさ

これらの教材を学習してから入試問題(第3問(3))を解いてみてください。

すらすらと解けることにびっくりします。

*数専ゼミの高校数学教材は, 山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから, この教材を学び切ることで, 医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2021年度・第3問(3)】 - (2枚目/2枚)

➡ (前のページからのつづき)

【考え方】(3) 全体がベクトルの問題ですから、「AEの長さを求めよ」ということは、「 $|\vec{AE}|$ の値を求めよ」という意味であると考えます。

点Eは線分BCを1:3に内分する点であり、 \vec{AE} は \vec{AB} を \vec{AC} を用いて表すことができ、 $|\vec{AB}| = 7$, $|\vec{AC}| = 6$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{21}{2}$ がわかっていますから、あとは「ベクトルの和の大きさを2乗する」ことで、AEの長さを求めることができます。具体的な流れは答案をご覧ください。大切なことは、与えられた問題の条件と前の問の結果から、求められた値を導くプロセスを設計することです。



【注】山形大の問題は、ほとんどが、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問題が簡単に解けるように作問されています。

この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

この問題では、ベクトルの和の大きさを2乗するときに現れる内積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ の値を(1)の結果から利用します。

[答 案]

★(3) 線分AEの長さを求めよ。

- ・点EはBCを1:3に内分する点であるから、点Eの位置ベクトルは、

$$\vec{AE} = \frac{3\vec{AB} + 1\vec{AC}}{1+3} \quad \dots \textcircled{1}$$

- ・①の両辺のベクトルの大きさを2乗して、

$$\begin{aligned} |\vec{AE}|^2 &= \left| \frac{3\vec{AB} + \vec{AC}}{4} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} (9|\vec{AB}|^2 + 6\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AC}|^2) \end{aligned}$$

ここで、 ◀条件の確認

$$|\vec{AB}| = 7, \quad |\vec{AC}| = 6, \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{21}{2}$$

であるから、

$$|\vec{AE}|^2 = \frac{1}{16} \left(9 \cdot 49 + 6 \cdot \frac{21}{2} + 36 \right) = \frac{135}{4}$$

$$|\vec{AE}| > 0 \text{ より, } |\vec{AE}| = \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

- ・よって、線分AEの長さは、 $\frac{3\sqrt{15}}{2}$

◀内分点の位置ベクトル(点Aが基点)

◀2乗して展開すると、与えられた条件が使える形になる。

