

山形大学入試問題・前期

2021年度 数学

(1/1)

【第3問】

平面上の $\triangle ABC$ において $AB=7$, $BC=8$, $CA=6$ とする。辺 AB を $2:1$ に内分する点を D , 辺 BC を $1:3$ に内分する点を E , 線分 AE と線分 CD の交点を P とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。さらに, 辺 BC の垂直二等分線が線分 AE と交わる点を Q とする。このとき, 次の問に答えよ。

(1) 内積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ を求めよ。

★(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(3) 線分 AE の長さを求めよ。

(4) \vec{AP} を \vec{AE} を用いて表せ。

(5) \vec{AH} を \vec{AB} と \vec{AC} を用いて表せ。

(6) 線分 PQ の長さを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2021年度・数学)は, 第1問から第6問まであり, 学部に応じて, 次のように解答することが求められております。

人文社会科学部 第1, 2, 3問 (90分)

理学部 第1, 3, 4, 5問 (120分)

医学部 第1, 3, 5, 6問 (120分)

農学部 第1, 2, 3, 4問 (120分)

★

■第3問の出題項目: ベクトル(数学B/2024年度からは数学C)

出題内容: 平面ベクトル

■今回は, 第3問のうち(2)のみの解答です。((1) (3) (4) (5) (6) は別ファイルになります。)

■2021年度・第3問(2)を解くための基礎教材(数専ゼミオリジナル《学習書》)

(2) 数学B ベクトルとその演算 No.27(1/7), (2/7)

◀ベクトルを利用した三角形の面積の公式

これらの教材を学習してから入試問題(第3問(2))を解いてみてください。

すらすらと解けることにびっくりします。

*数専ゼミの高校数学教材は, 山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから, この教材を学び切ることで, 医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(2) (1) で内積を求めさせて, (2) で三角形の面積を求めよ, であれば, だれだって「ベクトルを利用した三角形の面積の公式を使って面積を求めてくださいね」という意味だなということはわかります。なんかものすごく, 親切な問題です。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2021年度・第3問(2)】 - 〈2枚目/2枚〉

➤ (前のページからのつづき)



【注】山形大の問題は、ほとんどが、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問題が簡単に解けるように作問されています。

この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

この問題では、 $\triangle ABC$ の面積を、「ベクトルを利用した三角形の面積の公式」を

使って求めるために(1)の $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{21}{2}$ を利用します。

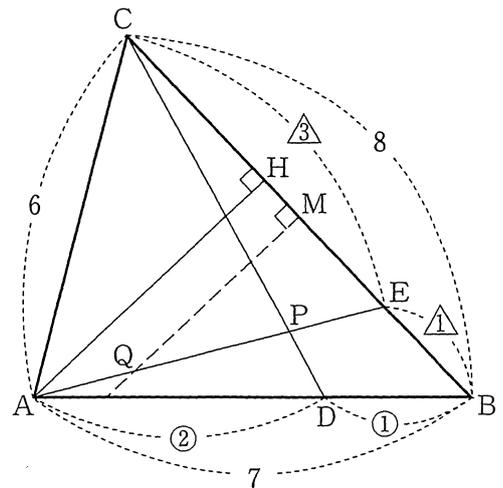
[答 案]

★(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

条件より、 $AB=7$ 、 $AC=6$ 、(1)より、 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{21}{2}$ がわかっているから、

「ベクトルを利用した三角形の面積の公式」を使って面積を求めることができる。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{7^2 \cdot 6^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} \sqrt{2^4 - 1} \\ &= \frac{21\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$



《別解》「三角形の面積を求める公式」の利用

(1)より、 $\cos A = \frac{1}{4}$ であるから、

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ より、}$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{21\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

◀第3問の全体の出題の流れからいえば、出題者は《別解》の答えは期待していないでしょう。