5

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第５問】

次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(\chi)=\chi^2(2\log\chi-1)$ を微分せよ。

(2) 関数 $F(\chi)=\int_{-2}^{\chi}|t|\,dt$ を微分せよ。

(3) 不定積分 $\int e^{-\chi}\cos x\,dx$ を求めよ。

(4) 関数 $G(\chi)=\int_0^{\chi}e^{-t}\cos t\,dt$ （$0\leqq\chi\leqq2\pi$）の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの χ の値を求めよ。

★(5) ａ＞０とする。次の関数 $g(\chi)$ が $\chi=2$ で連続であるとき，ａの値を求めよ。

$$g(\chi)=\begin{cases}\sqrt{\chi+a} & (\chi\geqq2)\\ \dfrac{1}{2}(\chi+a) & (\chi<2)\end{cases}$$

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第５問の出題項目：小問５問（数学Ⅲ）

出題内容：(1)(2) 導関数，(3) 部分積分，(4) 最大・最小，(5) 関数の連続性

■今回は，第５問のうち(5)のみの解答です。（(1)(2)(3)(4)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第５問(5)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル《学習書》）

(5) 数学Ⅲ　関数の極限と連続性　№１７（１／６）～（３／６）　◀関数の連続の判別

　　数学Ⅲ　関数の極限と連続性　№１８ｈ（１／１）　◀連続関数になるように係数決定

これらの教材を学習してから入試問題（第５問(5)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第５問 (5)】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(5)　問題を見た瞬間に，「連続関数になるように係数決定」の問題であると気づきます。教科書の「関数の極限と連続性」というタイトルが脳裏をかすめます。ここまでくれば，解法の流れは”決まり”です。

$$\chi = \mathrm{c}\text{ で連続} \iff \lim_{\chi \to \mathrm{c}-0} f(\chi) = \lim_{\chi \to \mathrm{c}+0} f(\chi) = f(\mathrm{c})$$

という，連続するための条件式を作り，方程式を解くと答が求まります。
問題で与えられた条件式は，「χの値２に対して，左側極限と右側極限を調べて下さいね。$\chi=2$で連続していますから，それらは等しくなりますよ。」と，非常に丁寧に教えてくれています。これが解けないと作問者に申し訳ないです。

★

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

ところが，この (5) の問題は…？
山形大学の問題としては，少々めずらしい問題です。(1)～(4) とは直接のつながりがありません。出題数をそろえるための”おまけ”の問題のような気がします。
(1)～(4) をとばして，いきなり (5) から入っても解けます。
だからといって，他の問題も…などと考えてはいけません。山形大学の問題は，基本的には，前の問題の結果を使ってはじめて，次の問題が解けるように作ってあります。
解いていて，「はて，どうしよう？」と迷ったときは，「前の問題の結果を，どこでどのように使うか」と考えてみましょう。道はおのずと開けてきます！

[答　　案]

★(5)　a＞０とする。次の関数$g(\chi)$が$\chi=2$で連続であるとき，aの値を求めよ。

$$g(\chi) = \begin{cases} \sqrt{\chi + \mathrm{a}} & (\chi \geqq 2) \\ \dfrac{1}{2}(\chi + \mathrm{a}) & (\chi < 2) \end{cases}$$

$\boxed{1}$　（$g(\chi)$ の極限値を調べる）

$$\lim_{\chi \to 2-0} g(\chi) = \lim_{\chi \to 2-0} \frac{1}{2}(\chi + \mathrm{a}) = \frac{1}{2}(2 + \mathrm{a})$$　◀左側極限

$$\lim_{\chi \to 2+0} g(\chi) = \lim_{\chi \to 2+0} \sqrt{\chi + \mathrm{a}} = \sqrt{2 + \mathrm{a}}$$　◀右側極限

$\boxed{2}$　（$g(\chi)$ が$\chi=2$で連続となるための条件を示す）

$g(\chi)$ が$\chi=2$で連続であるためには，

$$\lim_{\chi \to 2-0} g(\chi) = \lim_{\chi \to 2+0} g(\chi) = g(2)$$

であればよいので，

（次のページへつづく）↗

（前のページからのつづき）

3 （aの値を求める）

$$\frac{1}{2}(2+a)=\sqrt{2+a} \quad \cdots ①$$

両辺を２倍して２乗すると，

$$4+4a+a^2=4(2+a)$$

$$a^2=4$$

$$a=\pm 2$$

いずれも①を満たすが，条件より $a>0$ であるか，

$a=2$