5

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第５問】

次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(\chi)=\chi^2(2\log\chi-1)$ を微分せよ。

(2) 関数 $F(\chi)=\int_{-2}^{\chi}|t|\,dt$ を微分せよ。

(3) 不定積分 $\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。

★(4) 関数 $G(\chi)=\int_0^{\chi} e^{-t}\cos t\,dt$ （$0\leqq\chi\leqq2\pi$）の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの χ の値を求めよ。

(5) ａ＞０とする。次の関数 $g(\chi)$ が $\chi=2$ で連続であるとき，ａの値を求めよ。

$$g(\chi)=\begin{cases}\sqrt{\chi+a} & (\chi\geqq2)\\[6pt] \dfrac{1}{2}(\chi+a) & (\chi<2)\end{cases}$$

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，
学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（ ９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第５問の出題項目：小問５問（数学Ⅲ）

出題内容：(1)(2) 導関数，(3) 部分積分，(4) 最大・最小，(5) 関数の連続性

■今回は，第５問のうち(4)のみの解答です。（(1)(2)(3)(5)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第５問(4)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル《学習書》）

(4) 数学Ⅲ　導関数の応用　No.１３（１／４）　◀関数の最大値・最小値を求める。

これらの教材を学習してから入試問題（第５問(4)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(4) 関数 $G(\chi)$，「最大値・最小値」という文字を見た瞬間，頭の中を

定義域→導関数→増減表→極値→最大値・最小値

というテロップが流れます。

定義域と極値をからめて，最大値・最小値を求める問題であると考えます。

（定義域があるときは，極値だけで最大値・最小値を求めてはいけない，

という意味です。）

極値や定義域の両端が数値であれば，関数値を求めると最大値・最小値が直ちに読み取れますが，この問題では，関数値が e の累乗の分母で表されているので，見ただけではその大小関係が判断できないので，累乗の大きさと分数の大きさの関係から関数値の大小関係を調べます。

ここが，この問題の難しさといえます。

★

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。

この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

この問題では，$G(\chi)$ の積分（部分積分）を求めるのに，(3) の結果を利用します。

［答　　案］

★(4) 関数 $G(\chi)=\int_0^{\chi} e^{-t}\cos t\,dt$　（$0 \leqq \chi \leqq 2\pi$）の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの χ の値を求めよ。

$$G(\chi)=\int_0^{\chi} e^{-t}\cos t\,dt$$

1 （定義域）

条件より $0 \leqq \chi \leqq 2\pi$

2 （導関数）

$G'(\chi)=e^{-x}\cos x$　…①　　◀「定積分の微分」定理

3 （増減表，最大値・最小値）

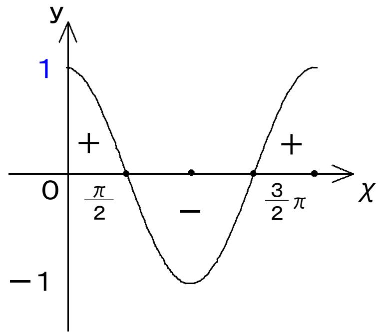
・（＋－の境目を調べる）

①で，$e^{-x}>0$ であるから，

$e^{-x}\cos x=0$ となるのは，

$\chi=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　…②

のときである。



（次のページへつづく）↗

□□ 【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第５問 (4)】 ー〈３枚目／４枚〉

（前のページからのつづき）

・（増減表をかく）

よって，$G(\chi)$ の増減表は，定義域と②より，次のようになる。

χ	0	…	$\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{3}{2}\pi$	…	2π
$G'(\chi)$		＋	0	−	0	＋	
$G(\chi)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	

・（$G(\chi)$ の値を求める）

ここで，(3) より，

$$G(\chi)=\int_0^{\chi} e^{-t}\cos t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t-\cos t)\right]_0^{\chi}$$
$$=\frac{1}{2}e^{-\chi}(\sin\chi-\cos\chi)-\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{-\chi}(\sin\chi-\cos\chi)+\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

◀ (3) の結果を使う！
《山形大学入試問題原理》

③において，

$\chi=0$ のとき，$G(0)=\frac{1}{2}e^{-0}(\sin 0-\cos 0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1(0-1)+\frac{1}{2}=0$

$\chi=\frac{\pi}{2}$ のとき，$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\pi}{2}-\cos\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}(1-0)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}$$

$\chi=\frac{3\pi}{2}$ のとき，$G\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}(\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\frac{3\pi}{2})+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}(-1-0)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{2}$$

$\chi=2\pi$ のとき，$G(2\pi)=\frac{1}{2}e^{-2\pi}(\sin 2\pi-\cos 2\pi)+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}e^{-2\pi}(0-1)+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}e^{-2\pi}+\frac{1}{2}$$

・（$G(\chi)$ の値を大小比較する）

ここで，

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}\right)>0$$

$$G\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{\frac{3\pi}{2}}}\right)>0$$

$$G(2\pi)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^{2\pi}}\right)$$

（次のページへつづく）

メニューへ戻る

（前のページからのつづき）

よって，

$e^{\frac{3\pi}{2}} < e^{2\pi}$ より，$\dfrac{1}{e^{\frac{3\pi}{2}}} > \dfrac{1}{e^{2\pi}}$ であるから，

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) > G(2\pi) > G\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0 = G(0)$$

・（答をまとめる）

したがって，

$\chi = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値　$\dfrac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}} + \dfrac{1}{2}$

$\chi = 0$ のとき，最小値　0