｜メニューへ戻る｜

5

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第５問】

次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x) = x^2(2\log x - 1)$ を微分せよ。

(2) 関数 $F(x) = \int_{-2}^{x} |t|\,dt$ を微分せよ。

★(3) 不定積分 $\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。

(4) 関数 $G(x) = \int_{0}^{x} e^{-t}\cos t\,dt$ （$0 \leqq x \leqq 2\pi$）の最大値と最小値を求めよ。

また，そのときの x の値を求めよ。

(5) $a > 0$ とする。次の関数 $g(x)$ が $x = 2$ で連続であるとき，a の値を求めよ。

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x + a} & (x \geqq 2) \\ \dfrac{1}{2}(x + a) & (x < 2) \end{cases}$$

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第５問の出題項目：小問５問（数学Ⅲ）

出題内容：(1)(2) 導関数，(3) 部分積分，(4) 最大・最小，(5) 関数の連続性

■今回は，第５問のうち(3)のみの解答です。（(1)(2)(4)(5)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第５問(3)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル《学習書》）

(3)
- ・数学Ⅲ　微分と導関数　No.９（１／６）　◀合成関数の微分法
- ・数学Ⅲ　不定積分　No.１４（１／１０），（２／１０）　◀部分積分法①（基本形）
- No.１４（６／１０）　◀部分積分法①'（基本log型）
- No.１５（１／５）　◀部分積分法②（部分積分を２回使う）
- No.１６（１／６），（２／６）　◀部分積分法②'（同形利用型）

これらの教材を学習してから入試問題（第５問(3)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

（次のページへつづく）↗

| メニューへ戻る |

（前のページからのつづき）

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(3)　「不定積分」という文字を確認し，積分すべき式を見ます。

e^{-x} と $\cos x$ …”ちがう種類の関数の積”だから”部分積分”と発想します。

発想できなかった人は，部分積分とは何かを基礎から学習しなおしましょう。

◀数専ゼミの《学習書》:「数学Ⅲ　前のページの基礎教材の「不定積分」の資料を参照。

次は，「部分積分の型」を思い出します。

①基本型（・基本／・Log）

②ダブル部分積分型（・部分積分を２回使う／・同形利用）

やってみないと，どの型になるのかはわかりません。

まず，部分積分の公式通りに計算を始めます。

途中で，積分できない式が出てきます。②の型だとわかります。

だから，その式をもう一度部分積分します。与式と同じ形の式が現れました。

②ダブル部分積分型（部分積分を２回使う／同形利用）

▲この型であると確定できました。

部分積分としては一番難しい型ですが，この解法プロセスを知っていればこんな易しい問題はありません。解法プロセスがパターン化されているから…。

このような論理で問題を解いてみてください。

なお，部分積分に自信のない人は，上で紹介した４つのパターンをひとまとめにして覚えて下さい。これを知識の“体系化”といいます。知識が体系化されているとそれが応用力になります。

［答　　案］

★(3)　不定積分 $\int e^{-x}\cos x\,dx$ を求めよ。

$I=\int e^{-x}\cos x\,dx$ とおく。　　◀違う種類の関数の積 ⇔ 部分積分法

$\boxed{1}$　（問題の一方を「微分の形」で表す）　　◀$\boxed{1}$の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(e^{-x})'=-e^{-x}$　$\cdots f(x)$，　　$(\cos x)'=-\sin x$　$\cdots g(x)$

微分しても簡単にならないのは $\cos x$ なので，こちらを「微分の形」で表すために

積分すると $(\sin x)$ となるから，$\int e^{-x}\cos x\,dx$ は $\int e^{-x}(\sin x)'dx$ と表せる。

【注】この問題では，e^{-x} を $(e^{-x})'$ と微分の形にして計算しても，答は同じになる。
（後で，実際に計算してみる。）

（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

$\boxed{2}$ （部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$I=\int e^{-x}(\sin x)'dx=e^{-x}\cdot\sin x-\int(e^{-x})'\cdot\sin x\,dx$$ ◀部分積分法の公式

$$=e^{-x}\cdot\sin x+\int e^{-x}\cdot\sin x\,dx \quad\cdots①$$ ◀$(e^{-x})'=-e^{-x}$

▲直接には積分できない（2種類の関数の積）。
→ 再度，部分積分法を利用する。

ここで，$\int e^{-x}\sin x\,dx$ に部分積分法を適用して，

$$\int e^{-x}\cdot(-\cos x)'dx=e^{-x}\cdot(-\cos x)-\int(e^{-x})'\cdot(-\cos x)dx$$

▲ I と同じ位置を「微分の形」で表す

$$=e^{-x}\cdot(-\cos x)-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos x-I \quad\cdots②$$ ▲与式と同じ形だから，これをI とおきかえる。

$\boxed{3}$ （同形利用）

②を①の後半部に代入して，

$$I=e^{-x}\cdot\sin x-e^{-x}\cdot\cos x-I$$

$$2I=e^{-x}(\sin x-\cos x) \quad\cdots③$$ ◀ Iを左辺へ移項し，右辺は共通因数を括りだし，式を整理する。

$$I=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$$ （Cは積分定数）

★　★　★

《e^{-x} を「微分の形」にした場合》

$$I=\int(-e^{-x})'\cos x\,dx=(-e^{-x})\cdot\cos x-\int(-e^{-x})\cdot(\cos x)'dx$$

$$=(-e^{-x})\cdot\cos x-\int(-e^{-x})\cdot(-\sin x)dx$$

$$=-e^{-x}\cdot\cos x-\int e^{-x}\cdot\sin x\,dx \quad\cdots①$$

ここで，$\int e^{-x}\cdot\sin x\,dx$ に部分積分法を適用して，

$$\int(-e^{-x})'\cdot\sin x\,dx=(-e^{-x})\cdot\sin x-\int(-e^{-x})\cdot(\sin x)'dx$$

$$=(-e^{-x})\cdot\sin x-\int(-e^{-x})\cdot\cos x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cdot\sin x+\int e^{-x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cdot\sin x+I \quad\cdots②$$

②を①に代入して，

$$I=-e^{-x}\cdot\cos x-(-e^{-x}\cdot\sin x+I)$$

＝～以下，③（cos x を「微分の形」で表したときの解き方）と同じ。