６

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数αは等式$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を満たすとする。また，$\alpha$の偏角$\theta$は$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$を満たすとする。ただし，$i$は虚数単位である。さらに，$r$を正の実数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　絶対値$|\alpha|$と偏角θを求めよ。

(2)　$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6$と$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2$の値を求めよ。

(3)　複素数平面上において，点αと点$r\alpha^2$を通る直線をL_1，点$r^2\alpha^3$と点$r^3\alpha^4$を通る直線をL_2とする。L_1とL_2のなす角θ_1 $\left(0\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$を求めよ。

★(4)　複素数平面上において，点$r^3\alpha^4$と点$r^5\alpha^6$を通る直線と実軸との交点を表す複素数をrを用いて表せ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第６問の出題項目：数学Ⅲ　複素数平面（２０２４年度からは数学Ｃ）

出題内容：$\alpha^6=\dfrac{1}{2}(1+i)$を満たす複素数

■今回は，第６問のうち(4)のみの解答です。（(1)(2)(4)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第６問(4)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(4)　・数学Ⅲ　平面図形と複素数　No.７（１／６），（２／６）　◀一直線になる条件

・数学Ⅲ　複素数平面　No.４（１／５）　◀一直線にある点

・数学Ⅲ　平面図形と複素数　No.６（１／９），（２／９）　◀２直線のなす角

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(4)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

【考え方】山形大学の入試問題には，次のような”出題原理”があります。

> 山形大の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が簡単に解けるように作問されている。

この「入試出題原理」をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

★

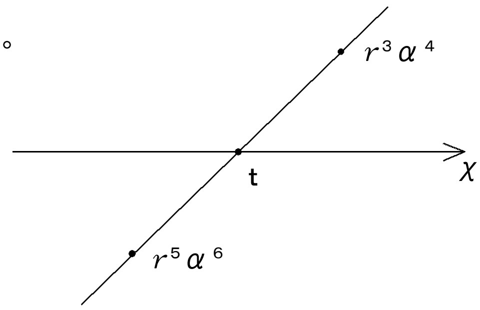
・「点$r^3\alpha^4$と点$r^5\alpha^6$を通る直線と実軸との交点を表す複素数」はすぐイメージできますね。→(右図：求める複素数をｔ(実数)とおきます。)

・３点が一直線上に並ぶことから，複素数平面上で「３点が一直線上にある条件」を思い浮かべます。

> ２つの複素数の商の極形式において偏角が０またはπの場合 ⇔ ３点が一直線上

この条件を，この問題で与えられたデータを用いて表現します。

◀詳しくは，数専ゼミの以下の《学習書》を参照してください。
→平面図形と複素数　No.7 (1／6)，(2／6)



・ｋ(２つの複素数の商＝実数)やｔを求めるために必要な複素数は，「山形大学入試出題原理」に従って前問の中からさがします。この問題(4) では，(＊)と(2) の中にあります。

［答　　案］

$$\alpha^6=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\quad\cdots(*)$$

★(4)　複素数平面上において，点$r^3\alpha^4$と点$r^5\alpha^6$を通る直線と実軸との交点を表す複素数をrを用いて表せ。

$\boxed{1}$　(３点が一直線上にある条件を示す)

求める複素数をｔ(ｔは実数)とおくと，点$r^3\alpha^4$，点$r^5\alpha^6$，点ｔが一直線上にあることから，

$$\frac{r^5\alpha^6-\mathrm{t}}{r^3\alpha^4-\mathrm{t}}=\mathrm{k}\quad(\mathrm{k}\text{は実数})$$

◀2つの複素数の商の極形式において偏角が0またはπの場合 ⇔ ３点が一直線上

これより，$r^5\alpha^6-\mathrm{t}=\mathrm{k}(r^3\alpha^4-\mathrm{t})$　(ｋは実数)　…⑧　　◀$r^3\alpha^4-\mathrm{t}\neq0$

（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

$\boxed{2}$　（kの値を求める）

（＊）より，$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$，（2）より，$\alpha^4=-i$ であるから，これらを⑧に代入して，

$$r^5\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)-t=k\{r^3\cdot(-i)-t\}$$

$$\frac{r^5}{\sqrt{2}}+\frac{r^5}{\sqrt{2}}i-t=-kr^3i-kt$$

$$\frac{r^5}{\sqrt{2}}-t+\frac{r^5}{\sqrt{2}}i=-kt-kr^3i \quad \cdots ⑨$$

⑨において，r，t，kは実数であるから，

$$\begin{cases}\dfrac{r^5}{\sqrt{2}}-t=-kt & \cdots ⑩ \\ \dfrac{r^5}{\sqrt{2}}=-kr^3 & \cdots ⑪\end{cases}$$

◀複素数の相等関係より

◀複素数の相等関係より

⑪において，$r\neq 0$ であるから，両辺をr^3 でわって，

$$k=-\frac{r^2}{\sqrt{2}} \quad \cdots ⑫$$

$\boxed{3}$　（tの値を求める）

⑫を⑩に代入して，

$$\frac{r^5}{\sqrt{2}}-t=-\left(-\frac{r^2}{\sqrt{2}}\right)t$$

$$r^5-\sqrt{2}t=r^2t$$

◀両辺×$\sqrt{2}$

$$\left(r^2+\sqrt{2}\right)t=r^5 \quad \cdots ⑬$$

⑬において，$r^2+\sqrt{2}\neq 0$ であるから，両辺を$r^2+\sqrt{2}$ でわって，

$$\underline{t=\frac{r^5}{r^2+\sqrt{2}}}$$