６

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数αは等式$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を満たすとする。また，$\alpha$の偏角$\theta$は$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$を満たすとする。ただし，$i$は虚数単位である。さらに，$r$を正の実数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　絶対値$|\alpha|$と偏角θを求めよ。

(2)　$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6$と$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2$の値を求めよ。

★(3)　複素数平面上において，点αと点$r\alpha^2$を通る直線をL_1，点$r^2\alpha^3$と点$r^3\alpha^4$を通る直線をL_2とする。L_1とL_2のなす角θ_1 $\left(0\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$を求めよ。

(4)　複素数平面上において，点$r^3\alpha^4$と点$r^5\alpha^6$を通る直線と実軸との交点を表す複素数をrを用いて表せ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第６問の出題項目：数学Ⅲ　複素数平面（２０２４年度からは数学Ｃ）

出題内容：$\alpha^6=\dfrac{1}{2}(1+i)$を満たす複素数

■今回は，第６問のうち(3)のみの解答です。（(1)(2)(4)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第６問(3)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(3)　・数学Ⅲ　平面図形と複素数　№４（１／４）　◀点αのまわりの回転

　　・数学Ⅲ　平面図形と複素数　№６（１／９），（２／９）　◀２直線のなす角

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(3)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

（前のページからのつづき）

【考え方】山形大学の入試問題には，次のような”出題原理”があります。

> 山形大の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が簡単に解けるように作問されている。

この「入試出題原理」をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

★

「複素数平面上」，「なす角」という２つのキーワードが目に入ったら，
”２つの複素数の商の極形式の偏角がなす角”
ということを瞬時に思い出してはじめて答案を書き出せます。
”山形大学の入試出題原理”から，この偏角は(2) で与えられています。
一般に，原点を通らない点を中心に回転する問題では，回転の中心が原点になるように，直線を平行移動してから，移動後の複素数の商を極形式に直して偏角を求め，２直線のなす角を求めます。
ここまでのヒントで答案が書けますか。
少々難しいようですね。そこで，もうひとつヒントです。

$r^3\alpha^4 - r^2\alpha^3 = r^2\alpha^2(r\alpha^2 - \alpha)$ より，

$$\frac{r^3\alpha^4 - r^2\alpha^3}{r\alpha^2 - \alpha} = r^2\alpha^2$$

と表せます。複素数の商が現れました。あとは，原則通り(2) の結果を使います。

［答　　案］

$$\alpha^6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \cdots (*)$$

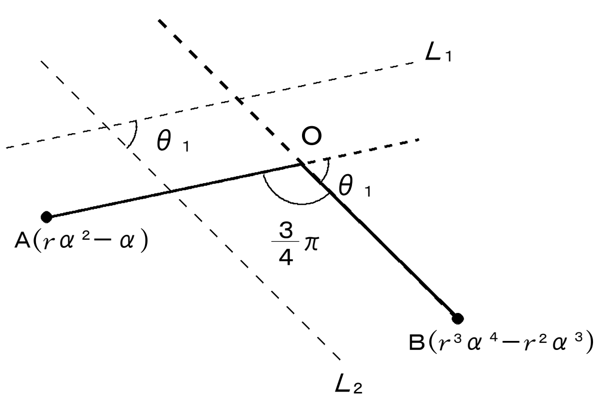
★(3) 複素数平面上において，点 α と点 $r\alpha^2$ を通る直線を L_1，点 $r^2\alpha^3$ と点 $r^3\alpha^4$ を通る直線を L_2 とする。L_1 と L_2 のなす角 θ_1 $\left(0 \leqq \theta_1 \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ を求める。

1 （点の平行移動）

◀原点Oを中心に回転できるようにするために。

・点 α が原点と重なるように直線 L_1 を平行移動すると，点 $r\alpha^2$ は点 $(r\alpha^2 - \alpha)$ に移り，この点をＡとする。（右図）

・点 $r^2\alpha^3$ が原点と重なるように直線 L_2 を平行移動すると，点 $r^3\alpha^4$ は点 $(r^3\alpha^4 - r^2\alpha^3)$ に移り，この点をＢとする。（右図）



（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

2 （点の回転移動）

２つの複素数$r^3\alpha^4-r^2\alpha^3$ と$r\alpha^2-\alpha$ の商を極形式に直したときの偏角が上の図の∠ＡＯＢ，すなわち，半直線ＯＡとＯＢのなす角であるから，

$$r^3\alpha^4-r^2\alpha^3=r^2\alpha^2(r\alpha^2-\alpha)$$

$$\frac{r^3\alpha^4-r^2\alpha^3}{r\alpha^2-\alpha}=r^2\alpha^2$$

$$=r^2\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)^2$$ ◀(2) より

$$=r^2\left(\cos 2\cdot\frac{3}{8}\pi+i\sin 2\cdot\frac{3}{8}\pi\right)$$ ◀ド・モアブルの定理

$$=r^2\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

これより，

半直線ＯＡを原点を中心として反時計回りにα^2の偏角，つまり，$\frac{3}{4}\pi$ だけ回転させると半直線ＯＢと重なることがわかる。

3 （なす角を求める）

上の図より，L_1 とL_2 のなす角θ_1 $\left(0\leqq\theta_1\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ は，

$$\theta_1=\pi-\frac{3}{4}\pi=\underline{\frac{\pi}{4}}$$