6

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数αは等式$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を満たすとする。また，$\alpha$の偏角$\theta$は$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$を満たすとする。ただし，$i$は虚数単位である。さらに，$r$を正の実数とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　絶対値$|\alpha|$と偏角θを求めよ。

★(2)　$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6$と$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2$の値を求めよ。

(3)　複素数平面上において，点αと点$r\alpha^2$を通る直線をL_1，点$r^2\alpha^3$と点$r^3\alpha^4$を通る直線をL_2とする。L_1とL_2のなす角θ_1 $\left(0\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$を求めよ。

(4)　複素数平面上において，点$r^3\alpha^4$と点$r^5\alpha^6$を通る直線と実軸との交点を表す複素数をrを用いて表せ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第６問の出題項目：数学Ⅲ　複素数平面（２０２４年度からは数学Ｃ）

出題内容：$\alpha^6=\dfrac{1}{2}(1+i)$を満たす複素数

■今回は，第６問のうち(2)のみの解答です。（(1)(3)(4)(5)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第６問(2)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(2)　・数学Ⅲ　複素数平面　№１５（１／５），（２／５）　◀ド・モアブルの定理

　　・数学Ⅲ　複素数平面　№１０（１／３）　◀極形式を　a＋bi　の形で表す

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(2)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第６問 (2)】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】山形大学の入試問題には，次のような”出題原理”があります。

> 山形大の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問が簡単に解けるように作問されている。

この「入試出題原理」をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

★

問題文を読んだ瞬間に，
「複素数のｎ乗の形だから，ド・モアブルの定理を使う。」
ということが思い浮かばないと，この問題は解けません。

・だから，最初にやることは，αを極形式で表すことです。
　これは，(1) の結果を使えば，すぐわかります。
　この後は，単なる「ド・モアブルの定理」の適用問題です。

・後半の問題も，”山形大学の入試出題原理”から考えます。
　当然，「前半の問題の結果を使え」ということです。
　因数分解(共通因数を括り出す)と指数法則が必要です。
　一般的に，$(a\chi+b\chi+c\chi)=\chi(a+b+c)$，$(ab)^2=a^2b^2$
　という性質を使います。
　これ自体はだれでも知っている簡単な性質ですが，この問題で，これらの
　性質が使える，ということを見抜くことは，そう易しいことではありません。
　”山形大学の入試出題原理”を知っていて，前半の問の結果をじっと見つめれば，
　あるいは，すぐ見抜けるかもしれませんが…

［答　　案］

$$\alpha^6=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\quad\cdots(*)$$

★(2)　$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6$と$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2$の値を求める。

1　（αを極形式で表す）

αの方程式$(*)$の解を

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad[r>0]\quad\cdots(A)$　とすると，

(1) より，$r=1$，$\theta=\frac{3}{8}\pi$ であるから，

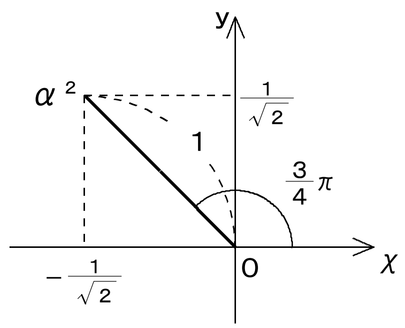
$$\alpha=\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi$$

2　（$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6$ の値を求める）

・ド・モアブルの定理より，

$$\alpha^2=\cos2\cdot\frac{3}{8}\pi+i\sin2\cdot\frac{3}{8}\pi$$

$$=\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi$$



（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

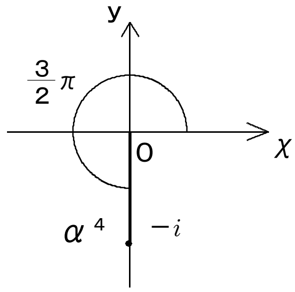
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \quad \cdots ⑥$$

・同様にして，

$$\alpha^4 = \cos 4\cdot\frac{3}{8}\pi + i\sin 4\cdot\frac{3}{8}\pi$$

$$= \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$$

$$= 0 - i$$



・（＊）より，$\alpha^6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ であるから，

$$\alpha^6 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

よって，

$$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i + 0 - i + -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)i$$

$$= (\sqrt{2}-1)i \quad \cdots ⑦$$

$\boxed{3}$　（$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2$ の値を求める）

$$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2 = \{\alpha(\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6)\}^2$$ ◀⑦の形を作る⇔共通因数 α を括り出す

$$= \alpha^2(\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6)^2$$ ◀指数法則

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\{(\sqrt{2}-1)i\}^2$$ ◀⑥と⑦より

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(\sqrt{2}-1)^2 i^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(2-2\sqrt{2}+1)$$ ◀$i^2=-1$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)(3-2\sqrt{2})$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-4}{2}(1-i)$$

$\boxed{4}$　（答をまとめる）

よって，$\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6 = (\sqrt{2}-1)i$，$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2 = \frac{3\sqrt{2}-4}{2}(1-i)$