6

山形大学入試問題・前期

２０２１年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数αは等式$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を満たすとする。また，$\alpha$の偏角$\theta$は$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$を満たすとする。ただし，$i$は虚数単位である。さらに，$r$を正の実数とする。このとき，次の問に答えよ。

★(1) 絶対値$|\alpha|$と偏角θを求めよ。

(2) $\alpha^2+\alpha^4+\alpha^6$と$(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^7)^2$の値を求めよ。

(3) 複素数平面上において，点αと点$r\alpha^2$を通る直線をL_1，点$r^2\alpha^3$と点$r^3\alpha^4$を通る直線をL_2とする。L_1とL_2のなす角θ_1 $\left(0\leqq\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$を求めよ。

(4) 複素数平面上において，点$r^3\alpha^4$と点$r^5\alpha^6$を通る直線と実軸との交点を表す複素数をrを用いて表せ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２１年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第６問の出題項目：数学Ⅲ　複素数平面（２０２４年度からは数学Ｃ）

出題内容：$\alpha^6=\dfrac{1}{2}(1+i)$を満たす複素数

■今回は，第６問のうち(1)のみの解答です。（(2)(3)(4)(5)は別ファイルになります。）

■２０２１年度・第６問(1)を解くための基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(1)
- ・数学Ⅲ　複素数平面　No.８（１／６），（２／６）　◀複素数の極形式
- ・数学Ⅲ　複素数平面　No.１９（１／８）　◀方程式$Z^n=\alpha$の解
- ・数学Ⅲ　複素数平面　No.６（２／４）　◀複素数の絶対値
- ・数学Ⅲ　複素数平面　No.１５（１／５），（２／５）　◀ド・モアブルの定理

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(1)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２１年度・第６問 (1)】　－〈２枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

【考え方】「複素数αは等式$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を満たすとする」という条件から，

「複素数αについての方程式$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を解く」プロセスを想定します。

ここから，
- 複素数のｎ乗の形だから，ド・モアブルの定理を使う。
- ド・モアブルの定理を使うために，αと$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$を極形式で表す。

この方針で，複素数の累乗の方程式を解く次のプロセスの答案くことを目指します。
（答案を書いていくとわかりますが，実際には，解を求めるわけではないので，複素数αを極形式に直して偏角を求めた段階で，それがこの問題の答になります。）

1　解を$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　［$r>0$］とし
方程式　$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$　の左辺と右辺を極形式で表す。

2　両辺の絶対値と偏角を比較して，
αの絶対値 **r** と偏角θの値を求める。

3　θは$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$の範囲にあるものを書き上げる。（実際は１個）

◀数専ゼミの《学習書》:「数学Ⅲ　複素数平面　№19（1／8）」を参照。

［答　　案］

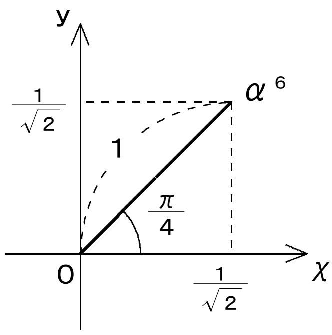
$$\alpha^6=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\quad\cdots(*)$$

★(1)　絶対値｜α｜と偏角θを求める。

1　（αを極形式で表す）

・αの方程式(＊)の解を，
$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　［$r>0$］　…(Ａ)　とすると，
$\alpha^6=r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)$　…①　　◀ド・モアブルの定理

・また，
$$\frac{1}{2}(1+i)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\quad\cdots②$$



①＝②より，
$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=1\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\quad\cdots③$$

（次のページへつづく）

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

2 （r の値とθ，αの一般式を求める）

③の両辺の絶対値と偏角を比較すると，

$r^6=1$　$r>0$ より，$r=1$ …④

$6\theta=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$　（ｋは整数）より，$\theta=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{3}$ …⑤

④，⑤を（Ａ）に代入して，

$$\alpha=1\left\{\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}\right)\right\}$$

3 （条件を満たすｋの値を求める）

条件より，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲で考えると，

$\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi k}{3}\leqq\dfrac{2\pi}{3}$

$\dfrac{1}{6}\leqq\dfrac{1}{24}+\dfrac{k}{3}\leqq\dfrac{2}{3}$　◀辺々÷π

$4\leqq1+8k\leqq16$　◀辺々×24

$3\leqq8k\leqq15$

$\dfrac{3}{8}\leqq k\leqq\dfrac{15}{8}$　◀辺々÷8

ｋは整数より，$k=1$

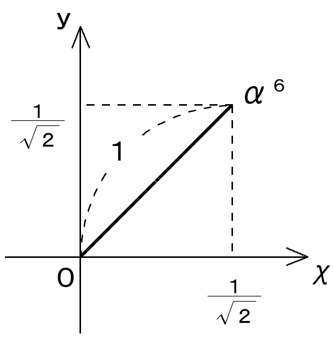
4 （$|\alpha|$およびθの値を求める）

・（＊）より，$\alpha^6=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i$

$$|\alpha^6|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$$

$|\alpha^6|=1$

$|\alpha|=1$



・⑤において，$k=1$であるから，

$$\theta=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi\cdot1}{3}=\frac{\pi}{24}+\frac{8\pi}{24}=\frac{9\pi}{24}=\frac{3}{8}\pi$$

4 （答をまとめる）

よって，$|\alpha|=1$，$\theta=\dfrac{3}{8}\pi$