3

山形大学入試問題・前期
２０２３年度　数学
（１／１）

【第３問】

平面上に平行四辺形ＡＢＣＤがある。ただし，ＡＢ＝ＡＤ＝１とする。また，点Ｃから直線ＡＢへ垂線を下ろし，その交点Ｅが$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}$（$1<t<2$）を満たすとする。さらに，線分ＢＣと線分ＤＥの交点をＦとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　を t を用いて表せ。
(2)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$　を t を用いて表せ。
(3)　線分ＡＣの長さを t を用いて表せ。
(4)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$　を t を用いて表せ。
★(5)　△ＢＥＣの面積Ｓを t を用いて表せ。また，S^2の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２３年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第３問の出題項目：数学Ｂ・ベクトル／数学Ⅲ　微分法
　　出題内容：平面ベクトル　　／４次関数の最大値

■今回は，第３問のうち(5)　のみの解答です。（(1)(2)(3)(4)は別ファイルになります。）

■２０２３年度・第３問(5)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
- ・数学Ⅲ　微分と導関数　№６（１／４）　◀積の微分公式
- ・数学Ⅲ　微分と導関数　№９（１／６）　◀合成関数の微分公式
- ・数学Ⅲ　導関数の応用　№１２（１／４）　◀高次関数の最大・最小

これらの教材を学習してから入試問題（第３問(5)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

【注】数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

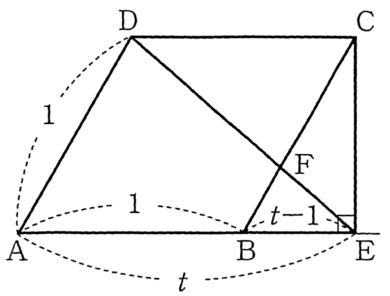
（前のページからのつづき）

【考え方】(5)　４次関数の最大値を求める問題である。最大値を求める基本的な手順で解ける。
すなわち，定義域の確認→導関数を求める→増減表を作り→最大値を求める→
そのときの最大値を与えるｔの値を求める。
積の微分法や合成関数の微分法については正しく使えることは当然である。
ｔの値が分数の無理数になるので，計算がやや難しくなる。これを１文字で置き換えて計算を簡単にして解く方法もあるが，解法の全体の流れがわかりにくくなるのでお勧めではない。

【注】山形大学の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

［答　案］

(5)　△ＢＥＣの面積Ｓをｔを用いて表せ。また，Ｓ^{2}の最大値と，そのときのｔの値を求める。



$\boxed{1}$（△BECの面積Sをtを用いて表す）

$$S=\frac{1}{2}\cdot BE\cdot EC$$
$$=\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{1-(t-1)^2}$$
$$=\frac{1}{2}(t-1)\sqrt{2t-t^2}$$

$\boxed{2}$（S^2の最大値を求める）

よって，

$$S^2=\frac{1}{4}(t-1)^2(2t-t^2)$$

$$f(t)=(t-1)^2(2t-t^2)$$　◀$\frac{1}{4}$は除いて計算する。最後にかける。

・（定義域を調べる）

問題の条件より，$1<t<2$

・（導関数を求める）

$f'(t)=\{(t-1)^2\}'(2t-t^2)+(t-1)^2\{(2t-t^2)\}'$　◀積の微分法

$=2(t-1)(2t-t^2)+(t-1)^2(2-2t)$　◀$\{(t-1)^2\}'$ は合成関数の微分法

$=2(t-1)(2t-t^2)-2(t-1)^2(t-1)$　◀$\{(2t-t^2)\}'$は，$(2t)'-(t^2)'$

$=2(t-1)\{2t-t^2-(t-1)^2\}$

$=2(t-1)\{2t-t^2-t^2+2t-1\}$

$=2(t-1)(-2t^2+4t-1)$

$=-2(t-1)(2t^2-4t+1)$　…①

（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

・（増減表を作って，最大値を求める）

①で，$f'(t)=0$ となる χ の値は，

$$-2(t-1)(2t^2-4t+1)=0$$

$$(t-1)(2t^2-4t+1)=0$$

$2t^2-4t+1=0$ を解くと，

$$t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

問題の条件より，$1<t<2$ であるから，$t=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$　…②

よって，増減表は，定義域と②より，次のようになる。

t	1	…	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	…	2
$f'(t)$	／	＋	0	－	／
$f(t)$	／	↗	極大	↘	／

・（$f(t)$ の値を求める）

$f(t)=(t-1)^2(2t-t^2)$ において，

$t=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき，

$$f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)^2\left\{2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}$$

ここで，

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-1\right)^2=\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=2+\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{4+4\sqrt{2}+2}{4}=\frac{6+4\sqrt{2}}{4}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}-\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{4+2\sqrt{2}-3-2\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第３問 (5)】　－〈４枚目／４枚〉

（前のページからのつづき）

$S^2=\frac{1}{4}f(t)$ より，S^2の最大値は

$$\frac{1}{4}\cdot f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\underline{\frac{1}{16}}$$

また，最大値を与える t の値は，$\underline{t=\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$