山形大学入試問題・前期　　2024.3.28(木)

３

２０２３年度　数学

（１／１）

【第３問】

平面上に平行四辺形ＡＢＣＤがある。ただし，ＡＢ＝ＡＤ＝１とする。また，点Ｃから直線ＡＢへ垂線を下ろし，その交点Ｅが$\overrightarrow{AE}=t\overrightarrow{AB}$（１＜ｔ＜２）を満たすとする。さらに，線分ＢＣと線分ＤＥの交点をＦとする。このとき，次の問に答えよ。

★(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ をｔを用いて表せ。
★(2)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ をｔを用いて表せ。
★(3)　線分ＡＣの長さをｔを用いて表せ。
(4)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ をｔを用いて表せ。
(5)　△ＢＥＣの面積Ｓをｔを用いて表せ。また，S^2の最大値と，そのときのｔの値を求めよ

【入試情報】山形大学の入試問題(２０２３年度・数学)は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第３問の出題項目：数学Ｂ・ベクトル／数学Ⅲ　微分法
　出題内容：平面ベクトル　　／４次関数の最大値

■今回は，第３問のうち(1)(2)(3) のみの解答です。（(4)(5)は別ファイルになります。）

■２０２３年度・第３問(1)(2)(3)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

(1)	・数学Ｂ	ベクトルとその演算	№１（１／４）	◀等しいベクトル
		ベクトルとその演算	№２（１／３）	◀ベクトルの和
		ベクトルとその演算	№１７（１／３）	◀ベクトルの垂直と内積
		ベクトルとその演算	№２３（１／５）	◀内積の分配法則
(2)	・数学Ｂ	ベクトルとその演算	№１７（１／３）	◀ベクトルの垂直と内積
(3)	・数学Ｂ	ベクトルとその演算	№２５ｓ（１／３）	◀ベクトルの大きさの問題

これらの教材を学習してから入試問題（第３問(1)(2)(3)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

【注】数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第３問 (1)】 ー〈２枚目／３枚〉

↗ （前のページからのつづき）

【考え方】(1) から (5) までについて，「ｔを用いて表せ。」という問題であるから，内積の定義を使ってその値を求める式を作る。しかし，大きさがｔを含んでないときは，内積はｔを用いて表すことができない。その場合は，

大きさがｔを用いて表せる等しいベクトルに置き換える

ことで問題に答えることができるようになる。

(1) ここでは，与えられた条件から，瞬時に”ベクトルの和”と”ベクトルの垂直と内積”の性質を思いつかなければならない。性質は丸暗記ではなく，理由も言えることが大切である。もちろん，応用できるようになるためである。

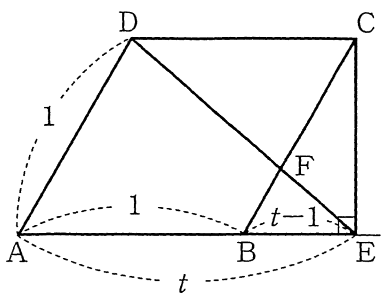
(2) $\overrightarrow{AB}$ も $\overrightarrow{AD}$ も大きさがｔで表せない。そこで，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ を使い，ベクトルの和より，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$ であり，ＢＥ＝ｔ－１であるから，，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ はｔを用いて表すことができるようになる。

(3) 大きさの問題は，２乗して展開すると，与えられた条件が使えるようになる。
(2) の結果 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=t-1$ を使うことを考える。

【注】山形大学の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

［答　　案］

★(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ をｔを用いて表す。



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC})$ ◀ベクトルの和

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}$ ◀内積の分配法則

$=t+0$ ◀ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{EC}\Longleftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}=0$

$=t$

★(2) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ をｔを用いて表す。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$ ◀ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})$ ◀ベクトルの和

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EC}$ ◀内積の分配法則

$=1\cdot(t-1)\cdot 1+0$ ◀ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BE}|\cos 0=1\cdot(t-1)\cdot 1$

$=t-1$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

★(3)　線分ＡＣの長さをｔを用いて表す。

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ より，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

よって，

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2$　◀大きさの問題は，２乗して展開する。

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+|\overrightarrow{AD}|^2$

$=1^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+1^2$

$=2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

(2) より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=t-1$ であるから，

$|\overrightarrow{AC}|^2=2+2(t-1)$

$=2t$

$|\overrightarrow{AC}|>0$ より，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2t}$

よって，$AC=\sqrt{2t}$