5

山形大学入試問題・前期

２０２３年度　数学

（１／１）

【第５問】

次の問に答えよ。

(1) 定数 a を $a \neq 1$ とする。関数 $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+a}{\chi-1}$ について，次の（ｉ），（ⅱ）に答えよ。

（ｉ）関数 $f(\chi)$ が極大値と極小値をもつような a の値の範囲を求めよ。

（ⅱ）関数 $f(\chi)$ が極小値６をもつような a の値を求めよ。

★(2) 曲線 $y=\chi^4+2\chi^3-3\chi^2$ を C とし，C 上の点Ｐ（１，０）における接線を L とするとき，次の（ｉ），（ⅱ），（ⅲ）に答えよ。

（ｉ）接線 L の方程式を求めよ。

（ⅱ）曲線 C と接線 L の共有点の座標を求めよ。

（ⅲ）曲線 C と接線 L で囲まれた部分の面積を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２３年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第５問の出題項目：数学Ⅲ・微分法・積分法

出題内容：分数関数の極値，曲線とその接線で囲まれた部分の面積

■今回は，第５問のうち(2)のみの解答です。（(1)は別ファイルになります。）

■２０２３年度・第５問(2)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

- ・数学Ⅱ　微分係数と導関数　No.７（１／６），（２／６）　◀接線の方程式①（接点の座標があるタイプ）
- ・数学Ⅱ　高次方程式　No.１５（１／４），（２／４）　◀組立除法
- ・数学Ⅱ　高次方程式　No.１６（１／５），（２／５）　◀因数定理
- ・数学Ⅱ　積分　No.１６（７／７）　◀3次関数のグラフと直線で囲まれた部分の面積

これらの教材を学習してから入試問題（第５問(2)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

【注】数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第５問(2)】　ー〈２枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

【考え方】(2)（ｉ）　曲線の接線を求める問題には，接点の座標が与えられているものと接点の座標を求めてから接線の方程式を求める２つのタイプがあります。
第５問(2)（ｉ)は，接点の座標が与えられているタイプの問題ですから，だれにでも解ける易しい問題になっています。

（ii）　単なる連立方程式の問題であるが，高次方程式なので，因数定理を用いて因数分解をして方程式を解くことになるが，暗算でもできるが，今後のことも考えて，「組み立て除法」(基礎)を使って解いてみよう。

（iii）　定積分を使った求積問題です。基本中の基本です。解けないとダメです。

第５問を全体として評価すると，この問題は満点を取らないと合格できません。

【注】山形大学の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

［答　　案］

(2) 曲線 $y=\chi^4+2\chi^3-3\chi^2$ を C とし，C 上の点 P（１，０）における接線を L とするとき，

（ｉ）　接線 L の方程式を求める。

$\boxed{0}$（定義）

C：$f(\chi)=\chi^4+2\chi^3-3\chi^2$　とする。点 P（１，０）は曲線 C 上の接点である。

$\boxed{1}$（接線の傾きを求める）

$f'(\chi)=4\chi^3+6\chi^2-6\chi$ であるから，

$f'(1)=4\cdot1^3+6\cdot1^2-6\cdot1=4$

$\boxed{2}$（接線の方程式を求める）

よって，求める接線は，
傾き４，点 P（１，０）を通る直線なので，

$y-0=4(\chi-1)$

$y=4\chi-4$

（ii）　曲線 C と接線 L の共有点の座標を求める。

$$\begin{cases} C: y=\chi^4+2\chi^3-3\chi^2 & \cdots① \\ L: y=4\chi-4 & \cdots② \end{cases}$$

①＝②より，

$\chi^4+2\chi^3-3\chi^2=4\chi-4$

$\chi^4+2\chi^3-3\chi^2-4\chi+4=0$

$(\chi-1)(\chi^3+3\chi^2-4)=0$

$(\chi-1)(\chi-1)(\chi^2+4\chi+4)=0$

$(\chi-1)^2(\chi+2)^2=0$

$\chi=1,\ -2$

1	1	2	−3	−4	4
+		1	3	0	−4
	1	3	0	−4	0

1	1	3	0	−4
+		1	4	4
	1	4	4	0

（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

$x=1$ のとき，$y=4\times(1)-4=0$

$x=-2$ のとき，$y=4\times(-2)-4=-12$

よって，共有点の座標は　（１，０），（－２，－１２）

（iii）　曲線 C と接線 L で囲まれた部分の面積を求める。

右の図の網かけの部分の面積を求めればよい。

$$\int_{-2}^{1}\{(x^4+2x^3-3x^2)-(4x-4)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(x^4+2x^3-3x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^4-x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-1-2+4\right)-\left(-\frac{32}{5}+8+8-8-8\right)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1+\frac{32}{5}$$

$$=\frac{2+5+10+64}{10}$$

$$=\frac{81}{10}$$