５

山形大学入試問題・前期

２０２３年度　数学

（１／１）

【第５問】

次の問に答えよ。

★(1)　定数 a を a $\neq$ １とする。関数 $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+a}{\chi-1}$ について，次の（ⅰ），（ⅱ）に答えよ。

（ⅰ）　関数 $f(\chi)$ が極大値と極小値をもつような a の値の範囲を求めよ。

（ⅱ）　関数 $f(\chi)$ が極小値６をもつような a の値を求めよ。

(2)　曲線 $y=\chi^4+2\chi^3-3\chi^2$ を C とし，C 上の点Ｐ（１，０）における接線を L とするとき，次の（ⅰ），（ⅱ），（ⅲ）に答えよ。

（ⅰ）　接線 L の方程式を求めよ。

（ⅱ）　曲線 C と接線 L の共有点の座標を求めよ。

（ⅲ）　曲線 C と接線 L で囲まれた部分の面積を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２３年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■第５問の出題項目：数学Ⅲ・微分法・積分法

出題内容：分数関数の極値，曲線とその接線で囲まれた部分の面積

■今回は，第５問のうち(1)のみの解答です。（(2)は別ファイルになります。）

■２０２３年度・第５問(1)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

- 数学Ⅱ　導関数の応用　No.２（２／８）～資料　◀極大・極小（極値を求め，グラフをかく）
- 数学Ⅲ　導関数の応用　No.８（１／４）～（２／４）　◀分数関数の極大・極小（極値を求める）
- 数学Ⅲ　微分と導関数　No.７（１／７））　◀商の微分法

これらの教材を学習してから入試問題（第５問(1)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

【注】数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第５問（1）】　－〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】（1）（ⅰ）まで読んで，ここに書かれている条件から

・分数関数の極大値・極小値

・導関数→増減表

・商の微分法

を瞬時に発想できることが必要です。

そこで，まず，導関数を求めるための商の微分から入ります。

ここで，商の微分法がわからないと，第５問は０点です。　◀山形大の入試の特徴。

”微分”という文字を見たら，

・積の微分法　・商の微分法　・合成関数の微分法

の３つの公式を瞬時に想起し，この問題ではどれを使うかを選別できることが”基礎”となります。

ここでは，極大値・極小値を求めるのではなく，極値が存在するためのａの値の範囲を求める問題であるので，導関数の判別式を使って，極値が存在するための条件を調べます。（添付資料「３次関数のグラフ（まとめ）」を参照）

【注】山形大学の入試問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

［答　　案］

（1）定数ａをａ≠１とする。関数 $f(\chi)=\dfrac{\chi^2+a}{\chi-1}$ について，

（ⅰ）関数 $f(\chi)$ が極大値と極小値をもつようなａの値の範囲を求める。

$\boxed{1}$（導関数を求める）

$$f'(\chi)=\frac{(\chi^2+a)'(\chi-1)-(\chi^2+a)(\chi-1)'}{(\chi-1)^2}$$　◀商の微分法

$$=\frac{2\chi(\chi-1)-(\chi^2+a)\cdot 1}{(\chi-1)^2}$$

$$=\frac{\chi^2-2\chi-a}{(\chi-1)^2} \quad \cdots①$$

$\boxed{2}$（増減表を作って，極値を求める）　◀導関数の判別式を使う。

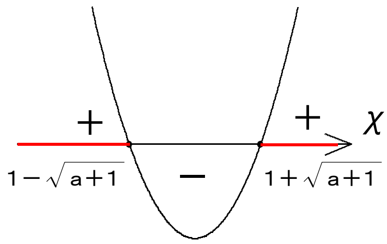
２次方程式 $\chi^2-2\chi-a=0$ の判別式をＤとすると，

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-a)=a+1$$

（ア）　$a+1>0$　つまり　$a>-1$ のとき，

$\chi^2-2\chi-a=0$ を解くと，

$$\chi=1\pm\sqrt{a+1} \quad \cdots②$$



（次のページへつづく）↗

↗（前のページからのつづき）

よって，$f(\chi)$ の増減表は，②より，

χ	…	$1-\sqrt{a+1}$	…	1	…	$1+\sqrt{a+1}$	…
$f'(\chi)$	＋	0	−	／	−	0	＋
$f(\chi)$	↗	極大	↘	／	↘	極小	↗

これより，$f(\chi)$ は極大値と極小値をもつ。　◀極大値と極小値を求める必要はない。

（イ）　$a+1 \leqq 0$　つまり　$a \leqq -1$ のとき，

$\dfrac{D}{4} \leqq 0$ より $\chi^2-2\chi-a \geqq 0$ であるから，$f'(\chi) \geqq 0$ となり，

$f(\chi)$ は極値をもたない。　◀（添付資料「３次関数のグラフ（まとめ）」を参照）

$\boxed{3}$ （aの値の範囲を求める）

（ア），（イ）より，求める a の範囲は　$a>-1$

（ⅱ）　関数 $f(\chi)$ が極小値６をもつような a の値を求める。

（ｉ）より，$\chi=1+\sqrt{a+1}$ のとき，$f(\chi)$ は極小値６をもつから，

$$f\left(1+\sqrt{a+1}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{a+1}\right)^2+a}{\left(1+\sqrt{a+1}\right)-1}=6$$

◀これ以降は単なる無理方程式の計算。

これを整理して，

$1+2\sqrt{a+1}+a+1+a=6\sqrt{a+1}$

$4\sqrt{a+1}=2(a+1)$

$2\sqrt{a+1}=a+1$

$4a+4=a^2+2a+1$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$a>-1$ より，$a=3$　◀ a の条件を確認すること。