｜メニューへ戻る｜

6

山形大学入試問題・前期

２０２３年度　数学

（１／１）

【第６問】

原点をＯとする座標平面において，放物線 $y^2=4p\chi$（$p>0$）を C_p とする。点Ｐを C_p 上の点とし，Ｐのｙ座標を正とする。点Ｐにおける放物線 C_p の接線と χ 軸の交点の座標を（$-q$，０）とする。また，点Ｐで直線ＯＰと接し，χ 軸の負の部分とも接する円を D_1 とする。点Ｐで直線ＯＰと接し，χ 軸の正の部分とも接する円を D_2 とする。円 D_1 と円 D_2 の半径をそれぞれ r_1，r_2 とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 点Ｐの座標を p，q を用いて表せ。

(2) 円 D_1 と円 D_2 の中心の χ 座標をそれぞれ χ_1，χ_2 とするとき，χ_1 と χ_2 を p，q を用いて表せ。

(3) r_1 と r_2 を p，q を用いて表せ。

(4) 円 D_1 と円 D_2 の面積の和Ｓを p，q を用いて表せ。

★(5) $pq=1-q^2$ を満たしながら p，q が変化するとき，Ｓの最小値と，そのときの q の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２３年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第６問のうち(5)のみの解答です。（(1)，(2)，(3)，(4)は別ファイルになります。）
第６問は，「数学Ⅲ・２次曲線」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２３年度・第６問(3)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
・数学Ⅲ　分数関数と無理関数　No.２（２／６）　◀次数下げ
・数学Ⅱ　式と証明　No.６（１／６），（２／６）　◀相加平均と相乗平均の大小関係（基本）
　　　　　　　　　No.６ｓ（２／３）　◀相加平均と相乗平均の大小関係（応用）◎

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(5)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・**第６問**(5)】　－〈２枚目／４枚〉

（前のページからのつづき）

【考え方】(5)　「最小値」ということばで，どれだけの戦略が発想できますか。
たとえば，・２次関数のグラフ→平方完成して式の形から求める
・３次関数や４次関数のグラフ→増減表を作って求める
・三角関数のグラフ→ｙ座標，あるいは不等式を読み取って求める
いずれも，この第６問(5) の問題では使えそうにありません。
第５問で増減表を使って極大値，極小値を求めさせているのだから，同じ”手”で解かせることなどないだろう，と発想し，別な”手”を考える人がきっといると思えますが…。それでもＯＫです。

そこで，”関数”から離れて「最小値」だけを求めるとなると，
「そうだ！相加平均と相乗平均の大小関係を使えば”最小値”が求まる！」と発想できれば，”基礎”がきちんとできている，ということです。

$\boxed{1}$　ａ＞０，ｂ＞０　（ａ，ｂは定数）

$\boxed{2}$　$a+b \geqq 2\sqrt{ab}=\alpha$　（この場合のαが最小値）

$\boxed{3}$　等号成立は，ａ＝ｂのとき

が，「相加平均と相乗平均の大小関係」のイメージです。◀使い方は資料を参照。

この問題では，与式をこのパターンにもちこめるように変形できれば，最小値が求まります。つまり，ａとｂの形を作るということです。積が定数となる２数を作る，という意味です。かなり，難しい変形です。条件の$1-q^2$が誘導してくれています。この条件をうまく使いこなせば答えが見えてきます。

★

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

(5)　$pq=1-q^2$ を満たしながら　p，qが変化するとき，Ｓの最小値と，そのときのqの値を求めよ。

［答　　案］

$\boxed{0}$　（定義）

(4) の結果について，右辺の計算が複雑になるのでπを左辺へ避難させる。

$S=\dfrac{\pi}{pq}(q^2+4pq)(q^2+2pq)$ より，

$\dfrac{S}{\pi}=\dfrac{1}{pq}(q^2+4pq)(q^2+2pq)$　　◀πは最後に答えの中に戻すことを忘れずに！

（次のページへつづく）

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

1 （式をを問題の条件に合う形に変形する。）

$pq=1-q^2$ を代入すると，

$$\frac{S}{\pi}=\frac{1}{1-q^2}\{q^2+4(1-q^2)\}\{q^2+2(1-q^2)\}$$

◀(4) の式を(5) の条件下に書きかえる。

ここで，

$$\begin{aligned}&\{q^2+4(1-q^2)\}\{q^2+2(1-q^2)\}\\&=(q^2+4-4q^2)\{q^2+2-2q^2\}\\&=(3q^2-4)(q^2-2)\\&=3q^4-10q^2+8\end{aligned}$$

$$\frac{S}{\pi}=\frac{3q^4-10q^2+8}{1-q^2}$$

◀「この式をどうするか」がかなり難しい。ゆきづまったら次数を下げてみる。

$$=\frac{1}{1-q^2}-3q^2+7$$

◀ $(3q^4-10q^2+8)\div(1-q^2)=-3q^2+7$　あまり１

◀ $-3q^2+7=-3q^2+3+4=-3(1-q^2)+4$

が見えれば，相加平均と相乗平均の大小関係が見えてくる！

$$=\frac{1}{1-q^2}+3(1-q^2)+4$$

◀相加平均と相乗平均の大小関係が使える形になった。

$a=\dfrac{1}{1-q^2}$，$b=3(1-q^2)$ として公式を使う。

2 （相加平均と相乗平均の大小関係を示す。）

ここで，$p>0$，$q>0$ より，$1-q^2=pq>0$ であるから，

◀ $p>0$ は問題の条件から，$q>0$ は (1) で $\chi'>0$，$\chi'=q$ より。

$$\frac{1}{1-q^2}>0,\quad 3(1-q^2)>0$$

◀相加平均と相乗平均の大小関係の公式を使うための条件。

よって，相加平均と相乗平均の大小関係より，

$$\frac{1}{1-q^2}+3(1-q^2)\geqq 2\sqrt{\frac{1}{1-q^2}\cdot 3(1-q^2)}\quad\cdots②$$

$$=2\sqrt{3}$$

したがって，

$$\frac{S}{\pi}=\frac{1}{1-q^2}+3(1-q^2)+4\geqq=2\sqrt{3}+4$$

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

3　（等号成立条件を示す。）

②の等号が成立するのは，１－q^2＞０，q＞０に注意すると，

$$\frac{1}{1-q^2}=3(1-q^2)$$

$$(1-q^2)^2=\frac{1}{3}$$

$$1-q^2=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$q^2=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$q^2=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

$$q=\frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{(3-\sqrt{3})\cdot 3}}{3}$$　◀ $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$$=\frac{\sqrt{9-3\sqrt{3}}}{3}$$

4　（答えをまとめる）

よって，Ｓの最小値は $(2\sqrt{3}+4)\pi$ であり，　◀ π を戻すことを忘れないように。

最小となるのは，$q=\dfrac{\sqrt{9-3\sqrt{3}}}{3}$

のときである。