６

山形大学入試問題・前期

# ２０２３年度　数学

（１／１）

## 【第６問】

原点をOとする座標平面において，放物線 $y^2=4p\chi$（$p>0$）を$C_p$とする。点Pを$C_p$上の点とし，Pのy座標を正とする。点Pにおける放物線$C_p$の接線と$\chi$軸の交点の座標を（$-q$，０）とする。また，点Pで直線OPと接し，$\chi$軸の負の部分とも接する円を$D_1$とする。点Pで直線OPと接し，$\chi$軸の正の部分とも接する円を$D_2$とする。円$D_1$と円$D_2$の半径をそれぞれ$r_1$，$r_2$とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　点Pの座標を$p$，$q$を用いて表せ。

(2)　円$D_1$と円$D_2$の中心の$\chi$座標をそれぞれ$\chi_1$，$\chi_2$とするとき，$\chi_1$と$\chi_2$を $p$，$q$を用いて表せ。

(3)　$r_1$と$r_2$をp，qを用いて表せ。

★(4)　円$D_1$と円$D_2$の面積の和Sを$p$，$q$を用いて表せ。

(5)　$pq=1-q^2$ を満たしながら $p$，$q$が変化するとき，Sの最小値と，そのときの$q$の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２３年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

| | | |
|---|---|---|
| 人文社会科学部 | 第１，２，３問 | （　９０分） |
| 理学部 | 第１，３，４，５問 | （１２０分） |
| 医学部 | 第１，３，５，６問 | （１２０分） |
| 農学部 | 第１，２，３，４問 | （１２０分） |

★

■今回は，第６問のうち(4)のみの解答です。（(1)，(2)，(3)，(5)は別ファイルになります。）
第６問は，「数学Ⅲ・２次曲線」からの出題です。（２０２４年度からは数学C）

■２０２３年度・第６問(4)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
問題全体が単なる計算問題なので，とくに基礎教材を学習する必要はありません。

【考え方】(4)　円$D_1$（半径$r_1$）と円$D_2$（半径$r_2$）の面積の和Sは，公式をそのまま適用すれば表現できるし，$r_1$と$r_2$は(3)　より$p$，$q$を用いて書きかえることができる。
よって，(4)　は単なる計算問題である。
共通因数をうまく括り出しながら式を簡単にしていけばよい。

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

（次のページへつづく）↗

□□【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第６問(4)】 ー〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

(4) 円$D_1$と円$D_2$の面積の和Ｓを$p$，$q$を用いて表す。

［答　　案］

(3) より，$r_1=\dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\left(q\sqrt{q^2+4pq}+q^2+4pq\right)$，$r_2=\dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\left(-q\sqrt{q^2+4pq}+q^2+4pq\right)$

であるから，

$S=\pi r_1{}^2+\pi r_2{}^2$

$=\pi\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\left(q\sqrt{q^2+4pq}+q^2+4pq\right)\right\}^2+\pi\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\left(-q\sqrt{q^2+4pq}+q^2+4pq\right)\right\}^2$

$=\dfrac{\pi}{4pq}\left\{\left(q\sqrt{q^2+4pq}\right)^2+(q^2+4pq)^2+\left(q\sqrt{q^2+4pq}\right)^2+(q^2+4pq)^2\right\}$ ◀平方公式の真ん中の項がキャンセルされて消える。

$=\dfrac{\pi}{4pq}\{2q^2(q^2+4pq)+2(q^2+4pq)^2\}$

$=\dfrac{\pi}{2pq}\{q^2(q^2+4pq)+(q^2+4pq)^2\}$ ◀共通因数2を括りだして，約分する。

$=\dfrac{\pi}{2pq}(q^2+4pq)(q^2+q^2+4pq)$ ◀{　}内で，共通因数$(q^2+4pq)$を括り出す。

$=\dfrac{\pi}{pq}(q^2+4pq)(q^2+2pq)$