６

山形大学入試問題・前期

２０２３年度　数学

（１／１）

【第６問】

原点をＯとする座標平面において，放物線 $y^2=4p\chi$ （$p>0$）をC_pとする。点ＰをC_p上の点とし，Ｐのｙ座標を正とする。点Ｐにおける放物線C_pの接線とχ軸の交点の座標を（$-q$，０）とする。また，点Ｐで直線ＯＰと接し，χ軸の負の部分とも接する円をD_1とする。点Ｐで直線ＯＰと接し，χ軸の正の部分とも接する円をD_2とする。円D_1と円D_2の半径をそれぞれr_1，r_2とする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　点Ｐの座標をp，qを用いて表せ。

(2)　円D_1と円D_2の中心のχ座標をそれぞれχ_1，χ_2とするとき，χ_1とχ_2をp，qを用いて表せ。

★(3)　r_1とr_2をp，qを用いて表せ。

(4)　円D_1と円D_2の面積の和Ｓをp，qを用いて表せ。

(5)　$pq=1-q^2$ を満たしながら p，qが変化するとき，Ｓの最小値と，そのときのqの値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２３年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第６問のうち(3)のみの解答です。（(1)，(2)，(4)，(5)は別ファイルになります。）
第６問は，「数学Ⅲ・２次曲線」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２３年度・第６問(3)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

・数学Ⅱ　点と直線　No.９（１／８），（２／８）　◀直線の方程式（一般形）
　　　　　　　　　　No.１１（１／８），（２／８）　◀2直線の平行・垂直
・数学Ⅱ　円と直線　No.１２（１／６），（２／６）　◀円の接線の方程式

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(2)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）

□□ 【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第６問 (3)】 －〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(3) まず，r_1，r_2 と p，q は，どこで関係しているかを調べる。◀図は最後のページ参照

r_1 と r_2 はそれぞれ円 D_1 と円 D_2 の半径である。

半径 r_1 と r_2 は，接点 $P\left(q,\ 2\sqrt{pq}\right)$ を通る接線ＯＰと垂直に交わる。

よって，２円の中心 $(\chi_1,\ r_1)$，$(\chi_2,\ r_2)$ は，接点 $P\left(q,\ 2\sqrt{pq}\right)$ を通る接線ＯＰに垂直な直線上にある。　◀r_1，r_2 と p，q はここで関係している。

1 まず，点 $P\left(q,\ 2\sqrt{pq}\right)$ を通り，ＯＰに垂直な直線の方程式…①を求める。
まず，直線の一般式を作り，それを y＝～の形に変形する。
（2以降の計算を楽にするため。）

2 次に，①の直線は２つの円の中心 $(\chi_1,\ r_1)$，$(\chi_2,\ r_2)$ を通るから，
・$\chi=\chi_1$，$y=r_1$
・$\chi=\chi_2$，$y=r_2$
をそれぞれ①に代入する。

3 最後に，(2) の結果を使って χ_1，χ_2 を p，q を用いた式に変換する。

(3) r_1 と r_2 を p，q を用いて表す。

［答　案］

1 （点Ｐを通り，ＯＰに垂直な直線の方程式を求める）

接線ＯＰの傾きは (1) より，$\dfrac{2\sqrt{pq}}{q}$ であるから，　◀(1) の結果の利用

点 $P\left(q,\ 2\sqrt{pq}\right)$ を通り，直線ＯＰと垂直に交わる直線の方程式は，

$$y-2\sqrt{pq}=-\frac{q}{2\sqrt{pq}}(\chi-q)$$
◀$m\cdot\dfrac{2\sqrt{pq}}{q}=-1$ ／直線の一般式

$$y=2\sqrt{pq}-\frac{q}{2\sqrt{pq}}\chi+\frac{q^2}{2\sqrt{pq}}$$
◀y＝～の形に変形する。

$$y=-\frac{q}{2\sqrt{pq}}\chi+\frac{4pq}{2\sqrt{pq}}+\frac{q^2}{2\sqrt{pq}}$$

$$y=-\frac{q}{2\sqrt{pq}}\chi+\frac{q^2+4pq}{2\sqrt{pq}}\quad\cdots①$$

2 （①の式を，円の中心の座標を使って表す）

①の直線は２つの円の中心 $(\chi_1,\ r_1)$，$(\chi_2,\ r_2)$ を通るから，

$\chi=\chi_1$ と $y=r_1$，$\chi=\chi_2$ と $y=r_2$ をそれぞれ①に代入すると，

$$\cdot\ r_1=-\frac{q}{2\sqrt{pq}}\chi_1+\frac{q^2+4pq}{2\sqrt{pq}}$$

$$\cdot\ r_2=-\frac{q}{2\sqrt{pq}}\chi_2+\frac{q^2+4pq}{2\sqrt{pq}}$$

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２３年度・第６問 (3)】 －〈３枚目／３枚〉

↗ （前のページからのつづき）

3 （r_1 と r_2 を p, q を用いて表す）

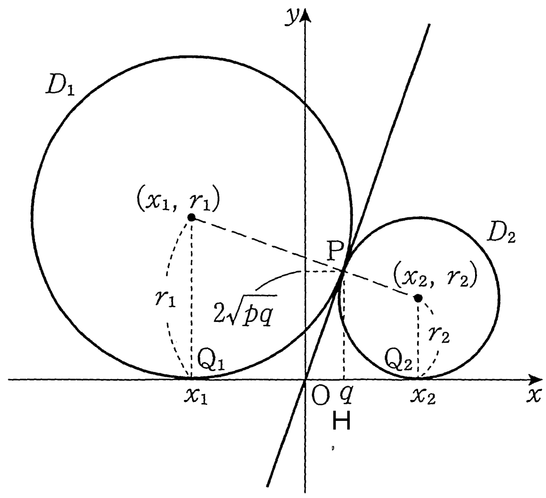
(2) より，$\chi_1 = -\sqrt{q^2+4pq}$，$\chi_2 = \sqrt{q^2+4pq}$ であるから，　◀ (2) の結果の利用

・$r_1 = -\dfrac{q}{2\sqrt{pq}}\left(-\sqrt{q^2+4pq}\right) + \dfrac{q^2+4pq}{2\sqrt{pq}}$

$r_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\left(q\sqrt{q^2+4pq}+q^2+4pq\right)$

・$r_2 = -\dfrac{q}{2\sqrt{pq}} \cdot \sqrt{q^2+4pq} + \dfrac{q^2+4pq}{2\sqrt{pq}}$

$r_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\left(-q\sqrt{q^2+4pq}+q^2+4pq\right)$



★

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。