

山形大学入試問題・前期

2023年度 数学

(1/1)

【第6問】

原点を O とする座標平面において、放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) を C_p とする。点 P を C_p 上の点とし、 P の y 座標を正とする。点 P における放物線 C_p の接線と x 軸の交点の座標を $(-q, 0)$ とする。また、点 P で直線 OP と接し、 x 軸の負の部分とも接する円を D_1 とする。点 P で直線 OP と接し、 x 軸の正の部分とも接する円を D_2 とする。円 D_1 と円 D_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする。このとき、次の問に答えよ。

- (1) 点 P の座標を p, q を用いて表せ。
- ★(2) 円 D_1 と円 D_2 の中心の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とすると、 x_1 と x_2 を p, q を用いて表せ。
- (3) r_1 と r_2 を p, q を用いて表せ。
- (4) 円 D_1 と円 D_2 の面積の和 S を p, q を用いて表せ。
- (5) $pq = 1 - q^2$ を満たしながら p, q が変化するとき、 S の最小値と、そのときの q の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2023年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

★

■今回は、第6問のうち(2)のみの解答です。(1), (3), (4), (5)は別ファイルになります。)

第6問は、「数学Ⅲ・2次曲線」からの出題です。(2024年度からは数学C)

■2023年度・第6問(2)が解けるようになる基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

・数学A 円の性質 No.5(1/5), (2/5) ◀接線の長さ

これらの教材を学習してから入試問題(第6問(2))を解いてみてください。

すらすらと解けることにびっくりします。

*数専ゼミの高校数学教材は、山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2023年度・第6問(2)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

【考え方】(2) p, q はどこにある?

◀[答 案]の図を参照。

(1) の利用 → $P(q, 2\sqrt{pq})$ であるから, p, q は点 P の座標にある。

p, q , すなわち点 P は x_1, x_2 とどのように関係つけられているか?

「円の接線」という条件から, 「円外の1点から円に引いた2本の接線の長さは等しい。」という性質を使う。(一般的な性質)

この問題では, この条件は, 次の形で与えられている。

$Q_1(x_1, 0), Q_2(x_2, 0)$ とおく。

点 O から接点までの距離は等しいから, $OQ_1 = OP, OQ_2 = OP$

点 $P(q, 2\sqrt{pq})$ より, 三平方の定理使って, OP の長さが求まる。

$OQ_1 = x_1, OQ_2 = x_2$ であるから, x_1, x_2 は p, q を用いて表すことができる。→具体的には, [答 案] を参照。

(2) 円 D_1 と円 D_2 の中心の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とするとき, x_1 と x_2 を p, q を用いて表す。

0

(定義)

$Q_1(x_1, 0), Q_2(x_2, 0)$ とおく。

点 P から x 軸に垂線 PH を引く。

1

(OP の長さを求める)

・円外の1点からその円に引いた接線の長さは等しいから,

$OQ_1 = OP$, すなわち $x_1 = OP$

$OQ_2 = OP$, すなわち $x_2 = OP$

・ $\triangle OHP$ に三平方の定理を適用して, 点 $O(0, 0)$, 点 $P(q, 2\sqrt{pq})$ より,

$$OP = \sqrt{q^2 + 4pq}$$

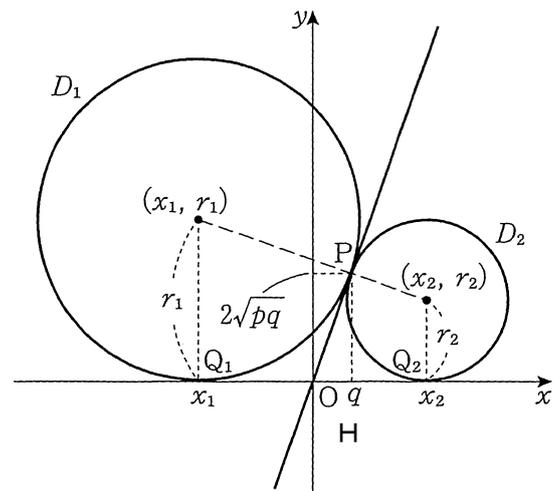
2

(x_1, x_2 を p, q で表す)

よって,

$$x_1 = -\sqrt{q^2 + 4pq}$$

$$x_2 = \sqrt{q^2 + 4pq}$$



★

【注】山形大の問題は, ほとんどが, 前の問の結果をうまく取り込むことで, 次の問題が簡単に解けるように作問されています。

この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。