



山形大学入試問題・前期

2023年度 数学

(1/1)

【第6問】

原点を O とする座標平面において、放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$)を C_p とする。点 P を C_p 上の点とし、 P の y 座標を正とする。点 P における放物線 C_p の接線と x 軸の交点の座標を $(-q, 0)$ とする。また、点 P で直線 OP と接し、 x 軸の負の部分とも接する円を D_1 とする。点 P で直線 OP と接し、 x 軸の正の部分とも接する円を D_2 とする。円 D_1 と円 D_2 の半径をそれぞれ r_1, r_2 とする。このとき、次の問に答えよ。

★(1) 点 P の座標を p, q を用いて表せ。

- (2) 円 D_1 と円 D_2 の中心の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とするとき、 x_1 と x_2 を p, q を用いて表せ。
- (3) r_1 と r_2 を p, q を用いて表せ。
- (4) 円 D_1 と円 D_2 の面積の和 S を p, q を用いて表せ。
- (5) $pq = 1 - q^2$ を満たしながら p, q が変化するとき、 S の最小値と、そのときの q の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2023年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

★

■今回は、第6問のうち(1)のみの解答です。(2), (3), (4), (5)は別ファイルになります。)第6問は、「数学Ⅲ・2次曲線」からの出題です。(2024年度からは数学C)

■2023年度・第6問(1)が解けるようになる基礎教材(数専ゼミオリジナル教材)

- ・数学Ⅰ 2次関数と方程式・不等式 No.2 (1/3) ◀グラフの交点の座標の求め方一般
- ・数学Ⅱ 微分係数と導関数 No.8 (1/4) ◀接線の求め方(接点がない場合)一般

【注】上の2つの資料は、第6問(1)を解くために直接使う知識ではありませんが、次の数学Ⅲで使う考え方を発想できるための”基礎”を学ぶためのものです。

- ・数学Ⅲ 2次曲線 No.8 s (1/6)~(2/6) ◀2次曲線(放物線)の接線

これらの教材を学習してから入試問題(第6問(1))を解いてみてください。

すらすらと解けることにびっくりします。

*数専ゼミの高校数学教材は、山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2023年度・第6問(1)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

【考え方】(1) 点Pは、放物線 $y^2 = 4px$ とこの放物線の接線との交点である。

交点の座標は2つのグラフの式を連立することで求まる。

求める点Pの座標を (x', y') とし、この2つのグラフを x' と y' で表し、これらの式を連立して、 x' と y' の値を求める。

この際、放物線 $y^2 = 4px$ ($p > 0$) の接線の方程式が必要である。◀別紙資料

[答 案]

(1) 点Pの座標を p, q を用いて表す。

① (定義)

点Pの座標を (x', y') ($x' > 0, y' > 0$) とおく。

② (x' と y' を p, q で表す)

・点Pは放物線 C_p 上の点であるから、

$$(y')^2 = 4px' \quad \dots \textcircled{1}$$

・点Pにおける放物線 C_p の接線の方程式は、

$$y'y = 2p(x + x')$$

この接線が $(-q, 0)$ を通るから、

$$y' \cdot 0 = 2p(-q + x')$$

$$p(-q + x') = 0$$

◀両辺を2で割った。

$p > 0$ より、

$$x' = q \quad \dots \textcircled{2}$$

◀両辺を p で割った。

②を①に代入すると、

◀①と②を連立する。

$$(y')^2 = 4pq$$

$y' > 0$ より

$$y' = 2\sqrt{pq}$$

③ (点Pの座標を p, q で表す)

したがって、求める点Pの座標は

$$\underline{(q, 2\sqrt{pq})}$$

★

【注】山形大の問題は、ほとんどが、前の問の結果をうまく取り込むことで、次の問題が簡単に解けるように作問されています。

この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

