

## 入試問題の基礎とは？

2024. 3. 12 (火)

### フロローク

今回は、入試問題(過去問)をどれだけ学習しても、入試問題が解けるようになるわけではないことを証明してみます。

題材は、2022年度・山形大学医学部入試問題の第6問(5)です。

## 入試問題(2022年度・第6問(5))

最初に、第6問全体を紹介します。

第6問は、【入試情報】で紹介してありますように、医学部を受験する人だけが解答することを求められている問題です。

「数学Ⅲ 平面図形と複素数」(2024年度からは数学Cとなっています)からの出題です。

### 【第6問】

複素数平面上で、複素数 $z$ を用いて、2つの円 $O_1$ と $O_2$ を、次の式で定義する。

$$O_1 : |z+5|=1+2\sqrt{5}$$

$$O_2 : |z-5|=1$$

この2つの円に外接する円 $O_3$ の中心を点 $P(\alpha)$ とし、円 $O_1$ と $O_3$ の接点を $Q(\beta)$ とおくとき、次の問に答えよ。

- (1) 複素数 $\alpha$ の実部が正であることを示せ。
- (2) 2つの実数 $x$ ,  $y$ と虚数単位 $i$ を用いて複素数 $\alpha$ を $\alpha = x + yi$ と表すとき、 $x$ を $y$ で表せ。
- (3)  $t = \tan(\arg(\alpha))$ としたとき、 $t$ のとりうる値の範囲を求めよ。  
ただし、 $\arg(\alpha)$ は複素数 $\alpha$ の偏角とする。
- (4) 複素数 $\alpha$ を $t$ を用いて表せ。

★(5)  $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{3}$  のとき、複素数 $\beta$ の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2022年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, <b>6</b> 問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

(5)の問題を解くときに、(1)~(4)の結果を利用しますので、あらかじめ紹介しておきます。

【注】山形大の問題は、ほとんどが、前の問の結果をうまく取り込むことで、次

の問題が簡単に解けるように作問されています。

この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

(1) より,  $x > 0$

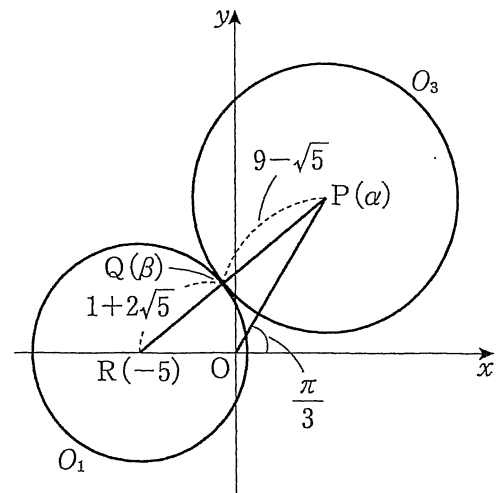
(2) より,  $r + 1 = \sqrt{5} (x - 1)$  …④

(3) より,  $-2 < t < 2$

(4) より,  $\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}} (1 + ti)$  …⑪

問題の条件を図示すると、右の図のようになります。

この図がかけた段階で、解き方の方針が立つ人もおりますが…。



## 解法の全体の”流れ”を描けますか

さて、どのように解きますか。答案を書く前に、解法の全体の”流れ”を描けますか。

ふつう、いきなり答案を書くのではなく、全体の解法の”流れ”の一案を設計し、その設計に従って答案を書いていきます。うまくいけば、それでよし。しかし、うまくいかなかった場合には別の”流れ”を考えます。

この”流れ”を設計するための資料は、問題に書かれている条件と自分の今もっている知識（データベース）です。この問題を解くために必要な”今もっている知識”が、その問題を解くときの”基礎”となります。

目の前の問題の条件下で、今もっているどの知識を使えばいいかは、自分で選定しなければなりません。

この自分が今もっているどの知識を使えばいいかを選定する力は、そのもっている知識の”質”に依存します。ただ、丸暗記しただけの知識では、何の役にもたちません。しかし、その知識が対象の”本質”を表す知識である場合には、問題のみかけの条件(攪乱条件)にまどわされることなく、正しく適用して問題を解くツールとして使うことができます。

## 第6問(5)の解法の戦略

このことをふまえて、第6問(5)の問題について考えてみましょう。

この問題を解くときには、実にいろいろな知識が必要ですが、本質的には、次の2点についての知識をもっていないと、解法の糸口さえも見つけることはできません。

### ①複素数の内分点の意味とそれを求める公式

・複素数の内分点の意味から…

「円 $O_3$ の半径を $r$ 、 $\alpha = x + yi$  ( $r > 0$ ,  $x, y$ は実数)、円 $O_1$ の中心を $R(-5)$ とすると、点 $Q$ は、線分 $PR$ を2円の半径の比に内分する点である。」

という条件が読み取れます。

・複素数の内分点の公式から…

▼ 内分点・外分点 ▼

2点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$  に対して、線分  $AB$  を  $m:n$  に

$$\text{内分する点は } \frac{n\alpha + m\beta}{m+n}, \quad \text{外分する点は } \frac{-n\alpha + m\beta}{m-n}$$

この知識から、まず  $r$  の値を求めなければならないことがわかります。  
これが、「全体の解法の”流れ”の一案を設計する」という作業です。

## ② グラフの交点の意味

点  $Q$  は  $PR$  の内分点ですから、点  $R$  の座標は問題の条件として与えられているから、 $r$  の値を求めるには、点  $P$  の  $x$  座標が必要です。

「一般に、2つのグラフがあれば、その交点としてグラフの式を連立すれば、その交点の座標を求めることができる。」—これが、座標平面上での点の座標の本質的知識です。

グラフは、直線と直線、直線と放物線、放物線と放物線、直線と円、円と円…、問題で与えられている条件に応じて自在に選べます。

さて、このような知識をもっていることで、「この第6問(5)では、どのグラフだろう」という方向へ思考は進みます。

「点  $P$  は2つの円の交点である。」ということがわかります。

そこで、思考は、与えられた問題の条件から  $r$  (円  $O_3$  の半径) を未知数とする2つの円の方程式をつくり、それを連立して解き、 $r$  を求めることに向かいます。

第6問(5)を解く前に、以上の①、②のような「全体の解法の”流れ”の一案を設計する」という作業が必要になります。だから…

### ① 複素数の内分点の意味とそれを求める公式

### ② グラフの交点の意味

についての2つの”基礎知識”(=本質的知識)をもっていない人は、この問題は”絶対に”解けないということがおわかりいただけたと思います。

## 入試問題(2022年度・第6問(5)) – 数専ゼミの指導

このような”流れ”が一瞬のうちに頭のなかを流れるとき、次のような【考え方】で答案が設計できます、だれでも、きっと…。

【考え方】(5) 円  $O_3$  の半径を  $r$ ,  $\alpha = x + yi$  ( $r > 0$ ,  $x, y$  は実数), 円  $O_1$  の中心を  $R(-5)$  とする。

**2** 点  $Q$  は、線分  $PR$  を 2円の半径の比に内分する点 であるから、まず  $r$  の値を求める。

(求め方) (2)④より、 $r + 1 = \sqrt{5}(x - 1)$  がわかっているから、

$$t = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \text{ のときの } x \text{ の値を求めれば、 } r \text{ の値が求まる。}$$

**1** そこで、最初に、 $t = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$  のときの  $x$  の値 を求める。

(求め方) (4)⑩に  $t = \sqrt{3}$  を代入すれば求まる。

◀  $\alpha$  の値が求まるから、 $\chi$  の値が分かる。

③ あとは、内分点  $\beta$  の値を求めればよい。 ◀  $\beta$  は複素数である。

(求め方) 内分公式を使って、 $P(\alpha)$  と  $R(-5)$  の内分点  $\beta$  の値を求める。

答えは①～③の順に書くことになります。

## 入試問題の”学習”とは何をする事なのか？

だから、入試問題の学習で一番大切なことは、問題の解き方（出来合いの答案＝参考書の解説）が書けるようになることではなく、上の【考え方】のような、与えられた問題の条件と定理などの知識を結びつけながら、問題で要求されている結果を導く技術（「解法の戦略」）を習得することなはずです。

この技術を使って答へ至るプロセスを組み立てることができれば、後はそれを簡潔に答案としてまとめればいだけなのでから…。

## 入試対策とは”基礎”対策のことです

もちろん、問題文や図を見て、”複素数の内分点”を発想できない人は、はなからこの問題は解けません。”解法の戦略”以前です。

つまり、この”複素数の内分点”というのがこの第6問(5)を解くための「基礎知識」となっております。

入試問題の練習というのは、9割がこの”基礎”の学習になります。

基礎知識をもっていなければ、たとえ、どのようなすぐれた”解法の戦略”をもっている、入試問題には手も足もでません。これが、”合格するための最高の学習戦略”といえます。

「過去問の学習」というのは、だから、共通テストと並行しながら少しずつ覚えていき、本格的にやるのは、共通テストが終わってからで十分なのです。

それ以前にやっておくことは、徹底した”基礎”の確認と補強なのです。

だから、数専ゼミの過去問分析には、必ず、その入試問題を解くために必要な”基礎知識”を紹介してあります。

そして、その知識を学ぶための数専ゼミオリジナル教材も紹介してあります。

是非、ご覧下さい。

ホームページの至る所に数専ゼミの教室で使う本物の教材が紹介してあります。

数専ゼミでは、このような指導方針のもとで、ハイレベルの大学へ、多くの合格者を出してきました。結果が方法の正しさを証明しています。

## ”基礎”は個人的である

では、入試の”基礎”として、何をどのように学べばいいのか、

こういう一般的なノウハウなどはありません。（YouTubeなどで奇抜なノウハウが氾濫しております

すが、ほとんどが”危ない”学習法なので気をつけましょう。)

個々人の学力の到達点と目標とする大学の入試レベルが異なるために、人によって“基礎”は異なるのです。

だから、数専ゼミでは、個々人の日々の学習を詳しくチェックしながら(「学力化学習法」)、その人が今、必要としている知識を、その人が目標としている大学の入試に合格するために必要なレベルの教材を用意してあげて、その人”だけ”のための”基礎”指導をしています。

## あなたにとっての”基礎”が学べる数専ゼミの算数・数学教室

### 数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: [suusen@seagreen.ocn.ne.jp](mailto:suusen@seagreen.ocn.ne.jp)