６

山形大学入試問題・前期

２０２２年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数平面上で，複素数zを用いて，２つの円O_1とO_2を，次の式で定義する。

$$O_1\ :\ |z+5|=1+2\sqrt{5}$$

$$O_2\ :\ |z-5|=1$$

この２つの円に外接する円O_3の中心を点$P(\alpha)$とし，円O_1とO_3の接点を$Q(\beta)$とおくとき，次の問に答えよ。

(1)　複素数αの実部が正であることを示せ。

(2)　２つの実数x，yと虚数単位iを用いて複素数αを$\alpha=x+yi$と表すとき，xをyで表せ。

(3)　$t=\tan(\arg(\alpha))$としたとき，tのとりうる値の範囲を求めよ。
　ただし，$\arg(\alpha)$は複素数αの偏角とする。

(4)　複素数αをtを用いて表せ。

★(5)　$\arg(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$のとき，複素数$\beta$の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第６問のうち(5)のみの解答です。（(1)，(2)，(3)，(4)は別ファイルになります。）
　第６問は，「数学Ⅲ・平面図形と複素数」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２２年度・第６問(5)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
- 数学Ⅲ　平面図形と複素数　№３（１／５）～（２／５）　◀内分点の公式
- 数学Ⅰ　２次関数と方程式・不等式　№２（１／３）　◀グラフの交点の座標

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(5)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

（次のページへつづく）↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２２年度・第６問 (5)】 －〈２枚目／３枚〉

↗（前のページからのつづき）

【考え方】(5) 円O_3 の半径をｒ，$\alpha = \chi + y i$（$r > 0$，χ，ｙは実数），円O_1 の中心をＲ(－５)とする。

2　点Ｑは，線分ＰＲを２円の半径の比に内分する点であるから，まずｒの値を求める。

（求め方）　(2)④より，$r + 1 = \sqrt{5}(\chi - 1)$がわかっているから，
$t = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ のときのχの値を求めれば，ｒの値が求まる。

1　そこで，最初に，$t = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ のときのχの値を求める。

（求め方）　(4)⑪に $t = \sqrt{3}$ を代入すれば求まる。

◀ αの値が求まるから，χの値が分かる。

3　あとは，内分点βの値を求めればよい。　◀ βは複素数である。

（求め方）　内分公式を使って，Ｐ(α)とＲ(－５)の内分点βの値を求める。

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

★(5) $\arg(\alpha) = \frac{\pi}{3}$ のとき，複素数βの値を求める。

円O_3 の半径をｒ，$\alpha = \chi + y i$（$r > 0$，χ，ｙは実数），円O_1 の中心をＲ(－５)とする。

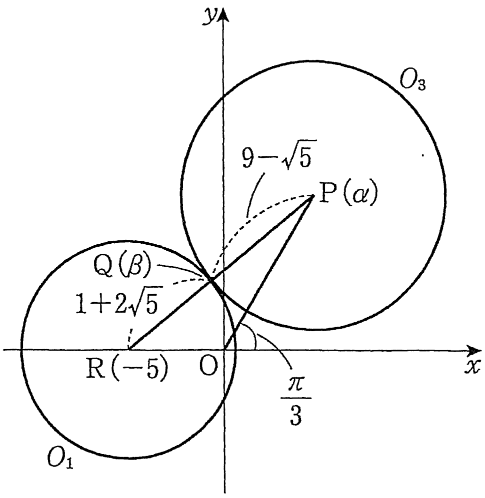
1　（χを求める）　◀ $t = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ のときのχの値

$t = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ であるから，(4) ⑪に $t = \sqrt{3}$ を代入して，

$$\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-(\sqrt{3})^2}}(1 - \sqrt{3} i)$$

◀ tを消去する。

$$\alpha = 2\sqrt{5}(1+\sqrt{3} i) = \underbrace{2\sqrt{5}}_{\chi} + \underbrace{\sqrt{3}}_{y}\ i$$



2　（ｒを求める）

・(2)④より，$r + 1 = \sqrt{5}(\chi - 1)$であるから，
これに$\chi = 2\sqrt{5}$ を代入して，
$r + 1 = \sqrt{5}(2\sqrt{5} - 1)$
$r = 9 - \sqrt{5}$

（次のページへつづく）↗

↗ （前のページからのつづき）

3 （β の値を求める）

ＰＱ：ＱＲ＝ｒ：（１＋２$\sqrt{5}$）

＝（９－$\sqrt{5}$）：（１＋２$\sqrt{5}$）

であるから，

$$\beta=\frac{(1+2\sqrt{5})\alpha+(9-\sqrt{5})\cdot(-5)}{(9-\sqrt{5})+(1+2\sqrt{5})}$$

◀内分点の公式

$$=\frac{(1+2\sqrt{5})\cdot 2\sqrt{5}(1+\sqrt{3}i)-45+5\sqrt{5}}{10+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{5}\left\{(1+2\sqrt{5})\cdot 2(1+\sqrt{3}i)-\frac{45}{\sqrt{5}}+5\right\}}{\sqrt{5}\left(\frac{10}{\sqrt{5}}+1\right)}$$

$$=\frac{(1+2\sqrt{5})\cdot 2(1+\sqrt{3}i)-9\sqrt{5}+5}{2\sqrt{5}+1}$$

◀分母の有理化

$$=\frac{7-5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}+1}+2\sqrt{3}i$$

◀$\beta=\chi+yi$ の形に変形する。

$$=\frac{(7-5\sqrt{5})(2\sqrt{5}-1)}{19}+2\sqrt{3}i$$

◀分母の有理化

$$=\underline{\sqrt{5}-3+2\sqrt{3}i}$$