6

山形大学入試問題・前期

２０２２年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数平面上で，複素数zを用いて，２つの円O_1とO_2を，次の式で定義する。

$$O_1 : |z+5|=1+2\sqrt{5}$$
$$O_2 : |z-5|=1$$

この２つの円に外接する円O_3の中心を点P(α)とし，円O_1とO_3の接点をQ(β)とおくとき，次の問に答えよ。

(1)　複素数αの実部が正であることを示せ。

(2)　２つの実数χ，yと虚数単位iを用いて複素数αを$\alpha=\chi+yi$と表すとき，χをyで表せ。

(3)　$t=\tan(\arg(\alpha))$としたとき，tのとりうる値の範囲を求めよ。
　ただし，$\arg(\alpha)$は複素数αの偏角とする。

★(4)　複素数αをtを用いて表せ。

(5)　$\arg(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$のとき，複素数$\beta$の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第６問のうち(4)のみの解答です。（(1)，(2)，(3)，(5)は別ファイルになります。）
第６問は，「数学Ⅲ・平面図形と複素数」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２２年度・第６問(4)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）

・数学Ⅲ　複素数平面　No.１（１／３）～（２／３）　◀複素数の意味，複素数平面のしくみ

・数学Ⅱ　一般角の三角関数　No.６（１／７），No.７（１／５），（２／５）　◀$\tan\theta$の定義

【注】これは第６問(3)で紹介済みです。

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(4)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(4)　(2)より，$\alpha=\chi+yi$（χ，yは実数）…(＊)と定義しているので，
このχとyをtを使って表せ，という問題である。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２２年度・第６問 (4)】　－〈２枚目／３枚〉

（前のページからのつづき）

・まず，(3) より，$t=\tan\theta=\dfrac{y}{\chi}$ とおけば，$y=t\chi$ と表せるので，
これを定義式に代入することで，y を消去できる。これを定義式２とおく。
・次に，(2) で，χ を y で表せという指示があるので，$\chi=$(y の式) で表し，
この式の y に，$y=t\chi$ を代入して t の式で書きかえる。
これを定義式２の χ に代入すると，α は t だけの式となる。

【注】式変形の途中で，商を求めるときに，分母が０でないことを確認するために，(1) と (3) の χ と t の範囲を利用する。

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

［答　　案］

★(4)　複素数 α を t を用いて表す。

$\boxed{1}$　（α の式で，y を消去する）

$\alpha=\chi+yi$（χ，y は実数）…⑦とする。

(3) より，$t=\tan\theta=\dfrac{y}{\chi}$ であるから，$y=t\chi$　…⑧である。

⑧を⑦に代入して，$\alpha=\chi+(t\chi)i=\chi(1+ti)$　…⑨　　◀yを消去する。

$\boxed{2}$　（χ を t の式で表す）

また，⑧を (2) ⑤に代入して，$\chi=\dfrac{\sqrt{(t\chi)^2+20}}{2}$

$4\chi^2=t^2\chi^2+20$

$(4-t^2)\chi^2=20$

(3) より，$-2<t<2$ であるから，

$\chi^2=\dfrac{20}{4-t^2}$

(1) より，$\chi>0$ であるから，

$\chi=\sqrt{\dfrac{20}{4-t^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}$　…⑩

$\boxed{3}$　（α を t で表す）

⑩を⑨に代入して，

$\alpha=\chi(1+ti)=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}(1+ti)$　…⑪　　◀ χ を消去する。

（次のページへつづく）

↗（前のページからのつづき）

《解法プロセスの論理構造》

第６問(4)の解法プロセスを，フローチャートで表すと次のようになっています。

(3) より $t=\dfrac{y}{\chi}$ であるから，$\boxed{y=t\chi}$

《α を t で表すプロセス》

(2) より，$\alpha=\chi+yi$

⬇◀代入 $\boxed{y=t\chi}$

$\alpha=\chi+(t\chi)i$

$\alpha=\chi(1+ti)$

⬇◀代入

《χ を t で表すプロセス》

$\chi=\dfrac{\sqrt{y^2+20}}{2}$

⬇◀代入 $\boxed{y=t\chi}$

$\chi=\dfrac{\sqrt{(t\chi)^2+20}}{2}$

$\chi=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}$

(4) $\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{4-t^2}}(1+ti)$