６ 山形大学入試問題・前期
２０２２年度　数学
（１／１）

【第６問】

複素数平面上で，複素数zを用いて，２つの円O_1とO_2を，次の式で定義する。

$$O_1 : |z+5|=1+2\sqrt{5}$$

$$O_2 : |z-5|=1$$

この２つの円に外接する円O_3の中心を点P(α)とし，円O_1とO_3の接点をQ(β)とおくとき，次の問に答えよ。

(1) 複素数αの実部が正であることを示せ。

(2) ２つの実数x，yと虚数単位iを用いて複素数αを$\alpha=x+yi$と表すとき，xをyで表せ。

★(3) <u>$t=\tan(\arg(\alpha))$としたとき，tのとりうる値の範囲を求めよ。</u>
<u>ただし，$\arg(\alpha)$は複素数αの偏角とする。</u>

(4) 複素数αをtを用いて表せ。

(5) $\arg(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$のとき，複素数$\beta$の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，<u>第６問のうち(3)のみ</u>の解答です。（(1)，(2)，(4)，(5)は別ファイルになります。）
第６問は，「数学Ⅲ・平面図形と複素数」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２２年度・第６問(3)が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
・数学Ⅱ　一般角の三角関数　No.６（１／７），No.７（１／５），（２／５）　◀tanθの符号
・数学Ⅲ　無限数列　No.８（１／３）～（２／３）　◀極限の考え方

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(3)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(3) $\arg(\alpha)=\theta$とおくと，$t=\tan\theta=\dfrac{y}{x}$であり，(1)より$x>0$であるから，
$t=\tan\theta$のとりうる値の範囲は<u>yの値を用いて</u>調べることができる。
▲詳しくは答案の中で説明。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２２年度・第６問(3)】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

ただし，tanθ の値は，ｙの符号によって符号が変わるので，ｙを

（ｉ）　ｙ＞０，　（ⅱ）　ｙ＝０，　（ⅲ）　ｙ＜０

の３つの場合に分けて，それぞれの範囲を求め，後でひとつにまとめればよい。

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

［答　　案］

★(3)　**ｔ＝tan(arg(α))としたとき，ｔのとりうる値の範囲を求める。ただし，arg(α)は複素数αの偏角とする。**

arg(α)＝θ とおくと，

(2)　⑤より，$\chi=\dfrac{\sqrt{y^2+20}}{2}$ であるから，

$$t=\tan\theta=\frac{y}{\chi}=\frac{y}{\frac{\sqrt{y^2+20}}{2}}=\frac{2y}{\sqrt{y^2+20}}\quad\cdots⑥$$

$\chi>0$ より，tanθ の値はｙの符号によって変わるので，ｙについて場合分けをする。

（ｉ）　ｙ＞０のとき，

$$t=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{20}{y^2}}}<2$$ であるから，$0<t<2$

◀y^2が限りなく大きくなると，√‾‾ は限りなく１に近づく。極限ではないが，極限に近い考え方を使う。

また，$\chi>0$，$y>0$のとき，$t=\tan\theta>0$

（ⅱ）　ｙ＝０のとき，

⑥より，　ｔ＝０

（ⅲ）　ｙ＜０

ｙ＝－Ｙ（Ｙ＞０）とおくと，⑥より，

$$t=\frac{-2Y}{\sqrt{Y^2+20}}=-\frac{2}{\sqrt{1+\frac{20}{Y^2}}}>-2$$

◀負の数では，絶対値が小さい方が数としては大きい。これも極限に近い考え方で大小関係を調べる。数直線上に数を目盛ると視覚的に分かる。

よって，　$-2<t<0$

◀$\chi>0$，$y<0$のとき，$t=\tan\theta<0$

（ｉ）～（ⅲ）より，　$-2<t<2$