「赤本」と数専ゼミの指導のちがい

2024.3.9(土)

プロローグ

２０２２年度の山形大学の入試問題のうち，第３問(5) の問題を例として，「赤本」と数専ゼミの教え方を比べてみました。
この「問題(第３問(5))」を取り上げたのは，教え方のちがいがはっきりとわかるからです。
この場合の「赤本」とは「’２３　山形大学」(教学社)のことです。

入試問題(2022年度・第3問)

【第 3 問】

平面上に点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあり，ＯＡ＝２，ＯＢ＝３，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，ＯＣ＝$\sqrt{15}$ を満たすとする。また，線分ＯＢ上に点Ｈがあり，$\overrightarrow{OB}$ と$\overrightarrow{DH}$ は直交しているとする。さらに，線分ＯＤの中点をＭ，線分ＢＭと線分ＤＨの交点をＰとするとき，$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$，ＤＰ＝３を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。
(2) △ＯＢＣの面積を求めよ。
(3) 内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ を求めよ。
(4) 線分ＯＤの長さを求めよ。
(5) ＤＰ：ＰＨを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(２０２２年度・数学)は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	(　９０分)
理学部	第１，３，４，５問	(１２０分)
医学部	第１，３，５，６問	(１２０分)
農学部	第１，２，３，４問	(１２０分)

(5)の問題を解くときに，(1)～(4)の結果を利用しますので，あらかじめ紹介しておきます。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=5$，(2) △ＯＢＣ＝$\frac{3\sqrt{11}}{2}$，(3) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=6$，(4) ＯＤ＝$2\sqrt{5}$

【注】山形大の問題は，ほとんどが，前の問の結果をうまく取り込むことで，次の問題が簡単に解けるように作問されています。
この技術をうまく使えるようになることが高得点を取る秘訣です。

入試問題（2022年度・第3問(5)）－赤本の解答

この問題(5)の赤本「’２３　山形大学」（教学社）の解答例は次の通りです。

(5)　$\angle\mathrm{BOD}=\theta$ とおくと

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\frac{6}{3\cdot2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OD}\cos\theta=2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=2\quad\cdots\cdots(*)$$

$$\mathrm{HB}=2-1=1$$

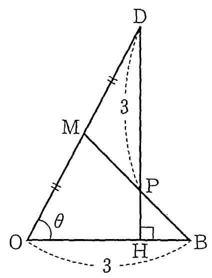
△OHD と直線 BM に注目して，メネラウスの定理により

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PH}}\cdot\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{BO}}\cdot\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MD}}=1$$

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PH}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{\mathrm{DP}}{\mathrm{PH}}=3$$

よって　　DP：PH＝3：1　……(答)



入試問題（2022年度・第3問(5)）－数専ゼミの指導

■今回は，第３問のうち(5)のみの解答です。（(1)～(4)は別ファイルになります。）
　第３問は，「数学Ｂ・ベクトル」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２２年度・第３問(5) が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
　・数学Ａ「三角形の性質」№.１１（２／５）

　これらの教材を学習してから入試問題（第３問(5)）を解いてみてください。
　すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】(5)　△ＯＨＤと直線ＭＢに注目すると，メネラウスの定理を使うことでＤＰ：ＰＨを求めることができることが見える。
ただし，メネラウスの定理を使うためには，ＨＢの長さが必要であるが，
与えられた条件からはＨＢの長さを求めることはできない。
そこで，ＯＨを求め，ＯＢ－ＯＨでＨＢを求めることになる。
よって，まずＯＨを求めることから始める。

$\boxed{1}$　ＯＨは△ＯＨＤの底辺で，余弦の定義より，ＯＨ＝ＯＤcos θ
・ＯＤは(4) より，$2\sqrt{5}$，

・cos θ は，内積の定義より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OD}|\cos\theta$ であるから，
(3) より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=6$，条件より，ＯＢ＝３，
(4) より，ＯＤ＝$2\sqrt{5}$ を定義式に代入することで求まる。

2 cos θ が求まれば，ＯＨが求まり，ＨＢが求まり，メネラウスの定理が使えるようになる。

［答　　案］

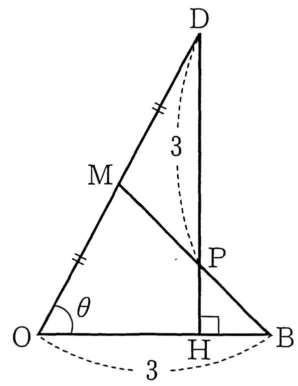
★(5) ＤＰ：ＰＨを求める。

1 ∠ＢＯＤ＝θ とおく。

内積の定義より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OD}|\cos\theta$

ここで，(3) より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=6$，条件より，ＯＢ＝３，
(4) より，ＯＤ＝$2\sqrt{5}$ であるから，
これらを定義式に代入して，

$2=3\times2\sqrt{5}\cos\theta$ より，$\cos\theta=\dfrac{6}{3\cdot2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



2 △ＯＨＤで，

余弦の定義より，ＯＨ＝ＯＤcos θ

$$=2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=2$$

3 よって，ＢＨ＝ＯＢ－ＯＨ
＝３－２＝１

4 △ＯＨＤと直線ＭＢに注目して，

◀メネラウスの定理を用いるときは，対象となる三角形と直線を明示する。

メネラウスの定理により，

$$\frac{DP}{PH}\cdot\frac{HB}{BO}\cdot\frac{OM}{MD}=1$$

ここで，$\dfrac{HB}{BO}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{OM}{MD}=\dfrac{1}{1}$ であるから，

◀ＭがＯＤの中点だから $\dfrac{OM}{MD}=\dfrac{1}{1}$

$$\frac{DP}{PH}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{DP}{PH}=3$$

5 よって，ＤＰ：ＰＨ＝３：１

どこがちがうの？

「赤本」の解答は，「簡潔で，解法の流れが押さえやすい」という人がおります。
それは，結果が分かっているから言えることで，問題だけを見ているときは，このような解法のプロセスを瞬時に思い浮かべることはできないはずです。
最初に考えることは，図と題意から「内分点，線分の比，三角形，直線…，メネラウスかな？」でしょう。
ふつうは，「赤本」の解答にあるように，いきなりcos θ ＝～とは発想できません。

解答する者にとって必要なことは，赤本のように，出来合いの答案ではなく（これは，これで答案を書くときには必要なのですが…），与えられた条件，すなわち，この問題では，(1)～(4)の結果とメネラウスの定理という知識とを，どのように結びつけて，ＤＰ：ＰＨを導くかです。
ということからいえば，実際の”解法の流れ”は，上の数専ゼミの【考え方】のような手順で，前問の結果からデータを収集しながら，メネラウスの定理を使える”手”を探ることであり，決して「赤本」の解答に書いてあるような手順で解くわけではありません。

入試問題の”学習”とは何をすることなのか？

だから，入試問題の学習で一番大切なことは，問題の解き方（出来合いの答案）が書けるようになることではなく，上の【考え方】のような，与えられた問題の条件と定理などの知識を結びつけながら，問題で要求されている結果を導く技術（「解法の戦略」）を習得することなはずです。
この技術を使って答へ至るプロセスを組み立てることができれば，後はそれを簡潔に答案としてまとめればいいだけなのですから…。

入試対策とは”基礎”対策のことです

もちろん，問題文や図を見て，”メネラウスの定理”を発想できない人は，はなからこの問題は解けません。”解法の戦略”以前です。
つまり，この”メネラウスの定理”というのがこの第３問(5)を解くための「基礎知識」となっております。

入試問題の練習というのは，９割がこの”基礎”の学習になります。
基礎知識をもっていなければ，たとえ，どのようなすぐれた”解法の戦略”をもっていても，入試問題には手も足もでません。これが，”合格するための最高の学習戦略”といえます。
「過去問の学習」というのは，だから，共通テストと並行しながら少しずつ覚えていき，本格的にやるのは，共通テストが終わってからで十分なのです。
それ以前にやっておくことは，徹底した”基礎”の確認と補強なのです。

だから，数専ゼミの過去問分析には，必ず，その入試問題を解くために必要な”基礎知識”を紹介してあります。
そして，その知識を学ぶための数専ゼミオリジナル教材も紹介してあります。
是非，ご覧下さい。
ホームページの至る所に数専ゼミの教室で使う本物の教材が紹介してあります。

数専ゼミでは，このような指導方針のもとで，ハイレベルの大学へ，多くの合格者を出してきました。結果が方法の正しさを証明しています。

あなたにとっての”基礎”が学べる数専ゼミの算数・数学教室