｜メニューへ戻る｜

6

山形大学入試問題・前期

２０２２年度　数学

（１／１）

【第６問】

複素数平面上で，複素数zを用いて，２つの円O_1とO_2を，次の式で定義する。

$$O_1 : |z+5|=1+2\sqrt{5}$$

$$O_2 : |z-5|=1$$

この２つの円に外接する円O_3の中心を点P(α)とし，円O_1とO_3の接点をQ(β)とおくとき，次の問に答えよ。

★(1)　**複素数αの実部が正であることを示せ。**

(2)　２つの実数x，yと虚数単位iを用いて複素数αを$\alpha=x+yi$と表すとき，xをyで表せ。

(3)　$t=\tan(\arg(\alpha))$としたとき，tのとりうる値の範囲を求めよ。
ただし，$\arg(\alpha)$は複素数αの偏角とする。

(4)　複素数αをtを用いて表せ。

(5)　$\arg(\alpha)=\dfrac{\pi}{3}$のとき，複素数$\beta$の値を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第６問のうち(1)のみの解答です。（(2)～(5)は別ファイルになります。）
第６問は，「数学Ⅲ・平面図形と複素数」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）

■２０２２年度・第６問(1) が解けるようになる基礎教材（数専ゼミオリジナル教材）
・数学Ⅲ　平面図形と複素数　No.１０（１／４）～（３／４）
・数学Ⅱ　円と直線　No.１（１／４）～（２／４）

これらの教材を学習してから入試問題（第６問(1)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

【考え方】円O_3の半径をr，$\alpha=x+yi$（$r>0$，x，yは実数）とする。

(1)　「複素数αの実部が正であること」は，$x>0$を示せばよい。
一般に，２つの図形が交わるとき，その２つの図形を方程式で表し，それらの方程式を連立することで，その交点の座標を求めることができる。

（次のページへつづく）↗

□□　【山形大学入試問題・前期　２０２２年度・第６問 (1)】　―〈２枚目／２枚〉

↗ （前のページからのつづき）

そこで，点P(α) は，与えられた条件（３つの円）から，

・中心（５，０），半径（ｒ＋１）の円①と

・中心（－５，０），半径（$r+1+2\sqrt{5}$）の円②

の交点である，ということができるから，

円①と②を円の方程式で表し，それらを連立してｙを消去してχとｒの等式で表し，それをχ＝～形で表し，～の部分が正であることを示せばよい。

実は，(1) は (2)，(3) の誘導問題である。

［答　　案］

0 （定義）

円O_3の半径をｒ，$\alpha=\chi+yi$ （$r>0$，χ，ｙは実数）とする。

★ (1) **複素数αの実部が正であることを示す。**　◀ (1) は (2)，(3) への誘導問題である。

1 （点Ｐ(α)の条件を調べる）

・点Ｐは，中心（５，０），半径（ｒ＋１）の円周上の点であるから，

$(\chi-5)^2+y^2=(r+1)^2$　…①

・また，点Ｐは，中心（－５，０），半径（$r+1+2\sqrt{5}$）の円周上の点であるから，

$(\chi+5)^2+y^2=(r+1+2\sqrt{5})^2$　…②

2 （χの値を求める）　◀これ以降は単なる計算問題である。

①，②を連立してχの値を求めると，　◀ ｙを消去する。

②－①

$$\begin{array}{rl} & (\chi+5)^2+y^2=(r+1+2\sqrt{5})^2 \\ -) & (\chi-5)^2+y^2=(r+1)^2 \\ \hline \end{array}$$

$(\chi+5)^2-(\chi-5)^2=(r+1+2\sqrt{5})^2-(r+1)^2$

$20\chi=(r+1)^2+4\sqrt{5}(r+1)+(2\sqrt{5})^2-(r+1)^2$

$20\chi=4\sqrt{5}(r+1)+20$

$\chi=\dfrac{4\sqrt{5}(r+1)+20}{20}$

$\chi=\dfrac{\sqrt{5}(r+1)+5}{5}$　…③

3 （χが正であることを示す）

$r>0$より，$\chi>0$であるから，

αの実部は正である。

（証明終）