3

山形大学入試問題・前期

２０２２年度　数学

（１／１）

【第３問】

平面上に点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあり，ＯＡ＝２，ＯＢ＝３，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，ＯＣ＝$\sqrt{15}$ を満たすとする。また，線分ＯＢ上に点Ｈがあり，$\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{DH}$ は直交しているとする。さらに，線分ＯＤの中点をＭ，線分ＢＭと線分ＤＨの交点をＰとするとき，$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$，ＤＰ＝３を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。
(2) △ＯＢＣの面積を求めよ。
(3) 内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ を求めよ。
(4) 線分ＯＤの長さを求めよ。
★(5) ＤＰ：ＰＨを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第３問のうち(5)のみの解答です。（(1)～(4)は別ファイルになります。）
第３問は，「数学Ｂ・ベクトル」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）
数専ゼミの通常授業で使っている教材（数学Ａ「三角形の性質」№１１（２／５））をごらん下さい。この入試問題を解く時に有効に使えることに気づくことと思います。

■数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

■ためしに，
「数専ゼミの入試対策基礎教材」（数学Ａ「三角形の性質」№１１（２／５））を学習してから入試問題（第３問(5)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

★

【考え方】(5) △ＯＨＤと直線ＭＢに注目すると，メネラウスの定理を使うことでＤＰ：ＰＨを求めることができることが見える。
ただし，メネラウスの定理を使うためには，ＨＢの長さが必要であるが，与えられた条件からはＨＢの長さを求めることはできない。
そこで，ＯＨを求め，ＯＢ－ＯＨでＨＢを求めることになる。
よって，まずＯＨを求めることから始める。

（次のページへつづく）↗

□ □　【山形大学入試問題・前期　２０２２年度・第３問 (5)】　－〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

1　ＯＨは△ＯＨＤの底辺で，余弦の定義より，ＯＨ＝ＯＤcos θ

・ＯＤは(4) より，$2\sqrt{5}$，

・cos θ は，内積の定義より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OD}|\cos\theta$ であるから，

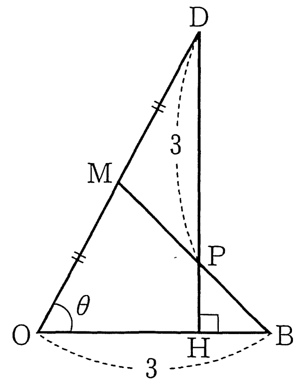
(3) より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=6$，条件より，ＯＢ＝３，

(4) より，ＯＤ＝$2\sqrt{5}$ を定義式に代入することで求まる。

2　cos θ が求まれば，ＯＨが求まり，ＨＢが求まり，メネラウスの定理が使えるようになる。

［答　　案］

★(5)　ＤＰ：ＰＨを求める。



1　∠ＢＯＤ＝θ とおく。

内積の定義より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OB}|\,|\overrightarrow{OD}|\cos\theta$

ここで，(3) より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=6$，条件より，ＯＢ＝３，

(4) より，ＯＤ＝$2\sqrt{5}$ であるから，

これらを定義式に代入して，

$2=3\times2\sqrt{5}\cos\theta$ より，$\cos\theta=\dfrac{6}{3\cdot2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

2　△ＯＨＤで，

余弦の定義より，ＯＨ＝ＯＤcos θ

$$=2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=2$$

3　よって，ＢＨ＝ＯＢ－ＯＨ

＝３－２＝１

4　△ＯＨＤと直線ＭＢに注目して，

◀メネラウスの定理を用いるときは，対象となる三角形と直線を明示する。

メネラウスの定理により，

$$\frac{DP}{PH}\cdot\frac{HB}{BO}\cdot\frac{OM}{MD}=1$$

ここで，$\dfrac{HB}{BO}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{OM}{MD}=\dfrac{1}{1}$ であるから，

◀ＭがＯＤの中点だから $\dfrac{OM}{MD}=\dfrac{1}{1}$

$$\frac{DP}{PH}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}=1$$

$$\frac{DP}{PH}=3$$

5　よって，**ＤＰ：ＰＨ＝３：１**