

山形大学入試問題・前期

2022年度 数学

(1/1)

## 【第3問】

平面上に点  $O, A, B, C, D$  があり,  $OA = 2, OB = 3, \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ ,  
 $OC = \sqrt{15}$  を満たすとする。また, 線分  $OB$  上に点  $H$  があり,  $\overrightarrow{OB}$  と  $\overrightarrow{DH}$  は直交している  
 とする。さらに, 線分  $OD$  の中点を  $M$ , 線分  $BM$  と線分  $DH$  の交点を  $P$  とするとき,  
 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$ ,  $DP = 3$  を満たすとする。このとき, 次の問に答えよ。

- (1) 内積  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  を求めよ。
- (2)  $\triangle OBC$  の面積を求めよ。
- ★(3) 内積  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$  を求めよ。
- (4) 線分  $OD$  の長さを求めよ。
- (5)  $DP : PH$  を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2022年度・数学)は, 第1問から第6問までであり,  
 学部に応じて, 次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問	(90分)
理学部	第1, 3, 4, 5問	(120分)
医学部	第1, 3, 5, 6問	(120分)
農学部	第1, 2, 3, 4問	(120分)

★

- 今回は, 第3問のうち(3)のみの解答です。( (1), (2), (4), (5) は別ファイルになります。 )  
 第3問は, 「数学B・ベクトル」からの出題です。(2024年度からは数学C)  
数専ゼミの通常授業で使っている教材(数学B「ベクトルとその演算」No.27(3/7))と比較  
 してみてください。酷似していることに気づくことと思います。

- 数専ゼミの高校数学教材は, 山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してありま  
 す。だから, この教材を学び切ることで, 医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

- ために,

「数専ゼミの入試対策基礎教材」(数学B「ベクトルとその演算」No.27(3/7))を学習して  
 から, 入試問題(第3問(3))を解いてみてください。  
 すらすらと解けることにびっくりします。

★

【考え方】(3)  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OD}$  ならば,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$  であるから, 内積は求まるので,

条件を使って,  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$  を作ることを考える。

◀資料No.27(3/7)(4)を参照

条件より,  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{DH}$  であり,  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{DH}$  のとき,  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{DP}$  である。

(次のページへつづく) ↗

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2022年度・第3問(3)】 - 〈2枚目/2枚〉

➤ (前のページからのつづき)

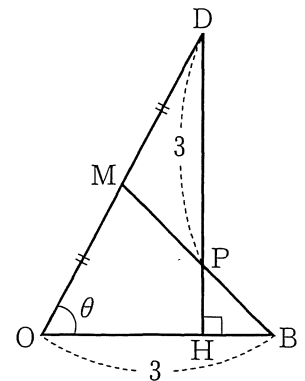
また、条件より、 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$  であるから、これを代入して、

$$\overrightarrow{OB} \perp \left( \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} \right)$$

$$\text{したがって、} \overrightarrow{OB} \cdot \left( \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \quad \blacktriangleleft \text{分配法則}$$

$OB = 3$  が与えられているから、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$  は求まる。



[答 案]

★(3) 内積  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$  を求める。

◀ 垂直  $\Leftrightarrow$  内積 = 0 の使える条件を調べる。

条件より、 $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{DH}$ ，すなわち  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{DP}$  より、 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$

条件より、 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$  であるから

$$\overrightarrow{OB} \cdot \left( \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OD} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0 \quad \blacktriangleleft \text{分配法則}$$

$$2|\overrightarrow{OB}|^2 - 3\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

条件より、 $OB = 3$  であるから、

$$2 \times 3^2 - 3\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = 6}}$$