３

山形大学入試問題・前期

２０２２年度　数学

（１／１）

【第３問】

平面上に点Ｏ，Ａ，Ｂ，Ｃ，Ｄがあり，ＯＡ＝２，ＯＢ＝３，$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$，ＯＣ＝$\sqrt{15}$ を満たすとする。また，線分ＯＢ上に点Ｈがあり，$\overrightarrow{OB}$ と$\overrightarrow{DH}$ は直交しているとする。さらに，線分ＯＤの中点をＭ，線分ＢＭと線分ＤＨの交点をＰとするとき，$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{OD}$，ＤＰ＝３を満たすとする。このとき，次の問に答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ を求めよ。

★(2)　**△ＯＢＣの面積を求めよ。**

(3)　内積 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ を求めよ。

(4)　線分ＯＤの長さを求めよ。

(5)　ＤＰ：ＰＨを求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問	（　９０分）
理学部	第１，３，４，５問	（１２０分）
医学部	第１，３，５，６問	（１２０分）
農学部	第１，２，３，４問	（１２０分）

★

■今回は，第３問のうち(2)のみの解答です。（(1)，(3)～(5)は別ファイルになります。）
第３問は，「数学Ｂ・ベクトル」からの出題です。（２０２４年度からは数学Ｃ）
数専ゼミの通常授業で使っている教材(数学Ｂ「ベクトルとその演算」№２７（１／７）～（３／７))と比較してみて下さい。酷似していることに気づくことと思います。

■数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

■ためしに，
「数専ゼミの入試対策基礎教材」（数学Ｂ「ベクトルとその演算」№２７（１／７）～（３／７））
を学習してから，入試問題（第３問(2)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっ　くりします。

★

【考え方】(2)　では，ベクトルを使った三角形の面積の公式を使って求めるが，このときに必要なデータは，$|\overrightarrow{OB}|^2$ と$|\overrightarrow{OC}|^2$ と$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ であるが，$|\overrightarrow{OB}|^2$ と$|\overrightarrow{OC}|^2$ は条件で与えられており，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ は，条件$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ を変形して，両辺を２乗することで得られる。

＊したがって，(1)，(2)　では，ベクトルの位置関係を表す図は必要ない。

（次のページへつづく）

□ □ 【山形大学入試問題・前期　２０２２年度・第３問 (2)】 －〈２枚目／２枚〉

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

★(2) **△ＯＢＣの面積を求める。**　　◀ベクトルを使った三角形の面積を求める公式を使う。

1　（内積$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$を求める）

条件$\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$より，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$　…①

①の両辺を２乗して，

$(3\overrightarrow{OA})^2=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2$

$9|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2$　…②

条件より，ＯＡ＝２，ＯＢ＝３を②に代入して，

$9\times2^2=3^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+(\sqrt{15})^2$

$2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=36-9-15=12$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=6$

2　（公式を使って面積を求める）

したがって，

$\triangle OBC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}$　　◀ベクトルを使った三角形の面積を求める公式

$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2\cdot(\sqrt{15})^2-6^2}$　　◀条件より，OB＝3，OC＝$\sqrt{15}$
1より，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=6$

$=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot15-36}$

$=\underline{\frac{3\sqrt{11}}{2}}$　　◀$\sqrt{99}=3\sqrt{11}$