

山形大学入試問題・前期

2022年度 数学

(1/1)

【第5問】

関数 $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ に対し、曲線 $y = f(x)$ を C とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) 曲線 C の変曲点を求めよ。
- (3) 曲線 C の接線で原点 O を通るものをすべて求めよ。
- (4) 不定積分 $\int x e^{-x} dx$, $\int x^2 e^{-x} dx$ を求めよ。

- ★(5) (3) で求めた接線のうち、その接点の x 座標が最小になるものを L とする。曲線 C と接線 L 、および y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題(2022年度・数学)は、第1問から第6問まであり、学部に応じて、次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第1, 2, 3問
理学部	第1, 3, 4, 5問
医学部	第1, 3, 5, 6問
農学部	第1, 2, 3, 4問

*今回は、第5問のうち(5)のみの解答です。(1)~(4)は別ファイルになります。)

第5問は、「数Ⅲ・微分法・積分法」からの出題です。

数専ゼミの通常授業で使っている教材(数Ⅲ「定積分」No.7(1/4))と比較してみてください。酷似していることに気づくことと思います。

*数専ゼミの高校数学教材は、山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから、この教材を学び切ることで、医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

*ために、

「数専ゼミの入試対策基礎教材」(数Ⅲ「定積分」No.7(1/4))を学習してから、入試問題(第5問(5))を解いてみてください。すらすらと解けることにびっくりします。

【学習上の戦略】面積を求める基本的な問題です。

「積分の問題だから面積も入れなくては…」のような感じのする問題です。

□ □ 【山形大学入試問題・前期 2022年度・第5問(5)】 - 〈2枚目/2枚〉

➡ (前のページからのつづき)

[答 案]

★(5) (3) で求めた接線のうち、その接点の x 座標が最小になるものを L とする。曲線 C と接線 L 、および y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ。

1 (接線 L の方程式)

(3) より、 L の方程式は、 $y = 2e^x$

2 (L と C の接点の座標)

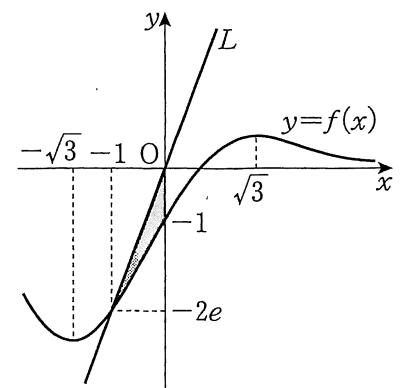
(3) より、 L と C の接点の座標は、 $(-1, -2e)$

$$\leftarrow y = 2e \times (-1) = -2e$$

3 (L と C のグラフ)

(1) の増減表をもとにして、曲線 C と接線 L のグラフをかくと、右図のようになる。

$$\begin{aligned} \leftarrow f(0) &= (0^2 + 2 \cdot 0 - 1)e^{-0} \\ &= -1 \quad (\text{Cのy切片}) \end{aligned}$$



4 (面積を求める)

$-1 \leq x \leq 0$ において、 $2e^x \geq f(x)$ だから、面積を求めると、

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^0 \{2e^x - (\chi^2 + 2\chi - 1)e^{-\chi}\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (2e^x - \chi^2 e^{-\chi} - 2\chi e^{-\chi} + e^{-\chi}) dx \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{ここで、(4) より、} \\ \int \chi e^{-\chi} dx = -(\chi + 1)e^{-\chi} + C \\ \int \chi^2 e^{-\chi} dx = -(\chi^2 + 2\chi + 2)e^{-\chi} + C \end{array} \right.$$

であるから、

$$= [e\chi^2 + (\chi^2 + 2\chi + 2)e^{-\chi} + 2(\chi + 1)e^{-\chi} - e^{-\chi}]_{-1}^0$$

$$= (2 + 2 - 1) - (e + e - e)$$

$$= \underline{3 - e}$$

◀ $f(ax + b)$ の不定積分

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

であるから、

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$