5

山形大学入試問題・前期

２０２２年度　数学

（１／１）

【第５問】

関数 $f(\chi)=(\chi^2+2\chi-1)e^{-\chi}$ に対し，曲線 $y=f(\chi)$ をＣとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(\chi)$ の極値とそのときの χ の値を求めよ。

(2) 曲線Ｃの変曲点を求めよ。

(3) 曲線Ｃの接線で原点Ｏを通るものをすべて求めよ。

★(4) 不定積分 $\int \chi e^{-\chi}dx$，$\int \chi^2 e^{-\chi}dx$ を求めよ。

(5) (3) で求めた接線のうち，その接点の χ 座標が最小になるものをＬとする。曲線Ｃと接線Ｌ，およびｙ軸によって囲まれた図形の面積を求めよ。

【入試情報】山形大学の入試問題（２０２２年度・数学）は，第１問から第６問まであり，学部に応じて，次のように解答することが求められております。

人文社会科学部	第１，２，３問
理学部	第１，３，４，５問
医学部	第１，３，５，６問
農学部	第１，２，３，４問

＊今回は，第５問のうち(4)のみの解答です。（(1)～(3)，(5)は別ファイルになります。）
第５問は，「数Ⅲ・微分法・積分法」からの出題です。
数専ゼミの通常授業で使っている教材(数Ⅲ「不定積分」No.１４(２／１０)，No.１５(１／５))と比較してみて下さい。酷似していることに気づくことと思います。

＊数専ゼミの高校数学教材は，山形大学医学部の入試問題にフォーカスをあてて作成してあります。だから，この教材を学び切ることで，医学部の入試問題を解く力が自然に身につきます。

＊ためしに，
「数専ゼミの入試対策基礎教材」（数Ⅲ「不定積分」No.１４(２／１０)，No.１５(１／５)）を学習してから，入試問題（第５問(4)）を解いてみてください。
すらすらと解けることにびっくりします。

【学習上の戦略】部分積分法（基本形，２回使うタイプ），合成関数の微分法，
１次関数の不定積分法を使って解きます。
いい機会ですので，この際，微分，積分の公式を”使えるように”整理して覚え直しておきましょう。

＊なお，(4) の問題は，(5) の問題を解くときに使う”誘導”問題です。
積分の”スター”は「求積」です！積分の「計算」は”スタッフ”です。

（次のページへつづく）↗

｜メニューへ戻る｜

↗（前のページからのつづき）

［答　　案］

★ (4)　**不定積分 $\int \chi e^{-\chi}dx$，$\int \chi^2 e^{-\chi}dx$ を求めよ。**

・$\int \chi e^{-\chi}dx$ を求める。　　◀ちがう種類の関数の積→部分積分法

$\boxed{1}$　（問題の一方を「微分の形」で表す）　◀$\boxed{1}$の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(\chi)'=1$　$\cdots f(\chi)$，　　$(e^{-\chi})'=-e^{-\chi}$　$\cdots g'(\chi)$　　◀$g'(\chi)$ 合成関数の微分法

微分しても簡単にならないのは $e^{-\chi}$ なので，こちらを「微分の形」で表すために

積分すると $(-e^{-\chi})$ となるから，$\int \chi e^{-\chi}dx$ は $\int \chi(-e^{-\chi})'dx$ と表せる。

◀$f(\mathrm{a}\chi+\mathrm{b})$ の不定積分

$$\int e^{\mathrm{a}\chi+\mathrm{b}}dx=\frac{1}{\mathrm{a}}e^{\mathrm{a}\chi+\mathrm{b}}+\mathrm{C}$$

$\boxed{2}$　（部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$\int \chi(e^{-\chi})'dx=\chi(-e^{-\chi})-\int \chi'(-e^{-\chi})dx$$

◀部分積分法の公式（基本形）

$$=-\chi e^{-\chi}-\int(-e^{-\chi})dx$$

$$=-\chi e^{-\chi}-\{-(-e^{-\chi})\}+\mathrm{C}$$　（Cは積分定数）

$$=-\chi e^{-\chi}-e^{-\chi}+\mathrm{C}$$

$$=-(\chi+1)e^{-\chi}+\mathrm{C}$$

◀共通因数 e^{χ} でくくる。

（次のページへつづく）↗

（前のページからのつづき）

・$\int \chi^2 e^{-\chi} dx$ を求める。　　◀ちがう種類の関数の積→部分積分法

$\boxed{1}$ （問題の一方を「微分の形」で表す）　◀$\boxed{1}$の部分は，答案には書かなくてもよい。

２つの関数のそれぞれを微分すると，

$(\chi^2)'=2\chi$ $\cdots f(\chi)$，　$(e^{-\chi})'=-e^{-\chi}$ $\cdots g'(\chi)$　◀$g'(\chi)$ 合成関数の微分法

微分しても簡単にならないのは$e^{-\chi}$ なので，こちらを「微分の形」で表すために 積分すると$(-e^{-\chi})$となるから，$\int \chi^2 e^{-\chi} dx$ は$\int \chi^2 (-e^{-\chi})' dx$ と表せる。

◀ $f(\mathrm{a}\chi+\mathrm{b})$の不定積分

$$\int e^{\mathrm{a}\chi+\mathrm{b}}dx=\frac{1}{\mathrm{a}}e^{\mathrm{a}\chi+\mathrm{b}}+\mathrm{C}$$

$\boxed{2}$ （部分積分法の公式を作り，右辺を計算する）

$$\int \chi^2(-e^{-\chi})'dx=\chi^2\cdot(-e^{-\chi})-\int(\chi^2)'(-e^{-\chi})dx$$　◀部分積分法の公式

$$=\chi^2\cdot(-e^{-\chi})-\int 2\chi(-e^{-\chi})dx$$

$$=-\chi^2 e^{-\chi}+2\int \chi e^{-\chi}dx$$

▲直接には積分できない（2種類の関数の積） → 部分積分法

ここで，$\int \chi e^{-\chi}dx$ に再度，部分積分法を適用して，

$$\int \chi(-e^{-\chi})'dx=\chi\cdot(-e^{-\chi})-\int \chi'(-e^{-\chi})dx$$　◀部分積分法の公式

$$=\chi\cdot(-e^{-\chi})+\int e^{-\chi}dx$$

$$=-\chi e^{-\chi}+(-e^{-\chi})+\mathrm{C}$$　（Cは積分定数）

$$=-\chi e^{-\chi}-e^{-\chi}+\mathrm{C}$$

◀ $f(\mathrm{a}\chi+\mathrm{b})$の不定積分

$$\int e^{\mathrm{a}\chi+\mathrm{b}}dx=\frac{1}{\mathrm{a}}e^{\mathrm{a}\chi+\mathrm{b}}+\mathrm{C}$$

$$=-\chi^2 e^{-\chi}+2(-\chi e^{-\chi}-e^{-\chi}+\mathrm{C})$$　（Cは積分定数）

$$=-\chi^2 e^{-\chi}-2\chi e^{-\chi}-2e^{-\chi}+\mathrm{C}$$

$$=\underline{-(\chi^2+2\chi+2)e^{-\chi}+\mathrm{C}}$$