

体験学習をどうぞ 154

▶ 2023. 12. 27 (水)

【高校数学Ⅱ】

一般角の三角関数

三角関数の式の値

「三角関数の式の値」を求める

三角関数の相互関係の応用問題として、「三角関数の式の値を求める」問題があります。次のような問題です。

次の問いに答えなさい。

(1) $\tan \theta = 2$ のとき、 $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$ の値を求めなさい。

(2) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき、以下の式の値を求めなさい。

① $\sin \theta \cos \theta$

② $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

解法のストラテジーはいたって単純です。

要するに、三角関数の式を、与えられた条件を使った式で表し、そこにその値を代入して計算すれば答えが求まります。

特殊なものとしては、(2) ①のように、条件式を変形すると関数の式の値が求まるタイプの問題もあります。

与式の三角関数を条件の式で書きかえる方法

三角関数の式を条件の式に変換するとき、3つの「三角関数の相互関係」の式を組み合わせ利用しますが、このときの式変形の方法には次の4つのパターンがあります。

- ① 分数の加減が出てきたら、通分して計算する。
- ② $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ が出てきたら、必ず1に置き換える。
- ③ 条件式に $\tan \theta$ がある場合は、 $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta$ や $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ を利用する。
- ④ 条件式が $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の和や差の形になっている場合は、両辺の2乗や因数分解を使って $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ の式を作る。

これらは、具体的には次のように使います。

(1) $\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$

$$= \frac{(1-\sin\theta)^2 + (1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} \quad \leftarrow \text{式変形①：分数の加減} \rightarrow \text{通分}$$

$$= \frac{1-2\sin\theta + \sin^2\theta + 1+2\sin\theta + \sin^2\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{2+2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$= 2 \frac{1+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \quad \leftarrow \text{式変形②：} 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta \text{ (このように変形して利用することが多い)}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \right)$$

$$= 2(1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta) \quad \leftarrow \text{式変形③：} \frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta, \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$= 2(1 + 2^2 + 2^2)$$

$$= \underline{18}$$

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると, $\leftarrow \text{式変形④：条件式が和} \rightarrow \text{両辺 2 乗}$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\leftarrow \text{式変形②：} \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin\theta\cos\theta = \underline{-\frac{3}{8}}$$

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$$= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \quad \leftarrow \text{式変形④：条件式が和} \rightarrow \text{因数分解}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{3}{8}\right)$$

$$= \underline{\frac{11}{16}}$$

エピソード

「なるほど」でおわってはダメです。

実際に問題を解きながら、三角関数の相互関係の式を使い回してみなければ、使えるようにはなりません。

自転車の乗り方を教えてもらっただけでは、自転車に乗れるようになるわけではないのと同じです。実際に、自転車の乗る練習を繰り返してはじめて自転車を自在に操れるようになります。

プリントNo.8では、練習問題を18題(基本13題, 発展5題)を用意してあります。

これを使って、徹底的に練習をして下さい。

「な～んだ。簡単なんだ。」ということを実感できるようになります。

そうになったら、三角関数など”なめて”かかりましょう。

そうならないときは…

練習がまだ足りません。練習を、何回でも繰り返しましょう。



◀●■【 まちがいをさせない教材 】■●▶

【数学Ⅱ・一般角の三角関数】

No.8 **4** 三角関数の相互関係(その2) ■ 三角関数の式の値 ■

■上の教材は、「教育エッセーMENU Essay_591, コンテンツ欄」よりリンクできます。

→ Link ▶ | [教育エッセーMENU](#) |

■演習問題は、数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導をしております。いつからでも受講できます。

三角関数を”基本”から積み上げる学習ができる

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp