

数学の教え方 051

▶ 2023.11.26(日)

【中学2年数学】

図形の性質

「正三角形の定義と性質」の指導

イントロ

生徒に勝手に証明を書かせると、
だらだらと何を言っているのかわからないようなものを作り上げます。
なぜ、そのような証明を書くのかと、問題集や参考書をひもとくと、
それらの「模範」解答も、「ダラダラ」！
なるほど、と納得しているようなわけで…。
添削する方は手間はかかるし、間違うし、でたいへんです。

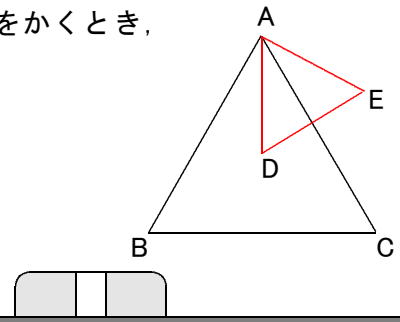
そこで、証明に形式を導入することにしました。
生徒も証明とは、何をすることであるかを理解できるし、
添削もスピーディーにできます。
生徒に独創的な証明を考えさせると思考力がつく、などはウソです。
応用力のない単発のアイデアをいくら積み重ねても思考力などはつきません。
「独創」と「我流」を混同してはいけません。
どの証明にも使える証明の書式を覚えることが、一番思考力をつけるのです。



あいも変わらず天真爛漫ノーテンキ！
ひとりだけで授業を楽しんでおります。
ん？
A子ですよ、A子！

また、摩訶不思議な答案を出してきました。
どうすると、このような発想が出てくるのか、
常識人には、とうてい理解できない世界です。
さっそく、笑って…
いや、真剣に分析してみましようか。

右の図のように、頂点Aが共通な正三角形ABC, ADEをかくとき、
 $BD = CE$
 である。
 このことを証明しなさい。



A子の答案

A子の答案をそのまま紹介します。

$\triangle ADC$ と $\triangle AEC$ において

$$\begin{cases} AC = AC \text{ (仮定より)} \dots \textcircled{1} \\ AD = EA \text{ (仮定より)} \dots \textcircled{2} \\ \angle DAC = \angle EAC \end{cases}$$

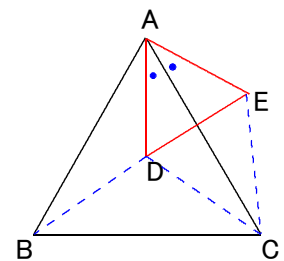
(頂角を垂直に二等分するから) $\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ から、2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ADC \cong \triangle AEC$$

合同な図形では対応する辺の長さは等しいから、

$$BD = CE$$



まちがい(その1)

先生：「ところでさ、A子！」

生徒A子：「ホイ！」

先生：「先生に対して”ホイ”はないでしょ、”ホイ”は？」

生徒A子：「じゃ、何というの？」

先生：「やはり、”ハイ”でしょうね。」

生徒A子：「ハエ！」

先生：「コボちゃんみたいなこと言ってないの！」

生徒A子：「コボちゃんってだあれ？」

先生：「あれ？」

コボちゃんを知らんの？」

生徒A子：「うん、知らん。」

先生：「また、脱線するから、

いい！

ところで、

三角形の頂角を垂直に二等分してみろ！」

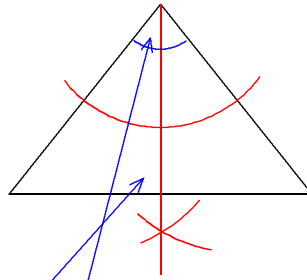
生徒A子：「な～んだ、そんなことか。

なんかすっごいこと言われるかとおもって

ドキドキ、わくわくしてたのに…。」

先生：「三角形の頂角を垂直に二等分するのってすごいことだと思うが…」

生徒A子：「でもないよ，してみんね！」



先生：「どこが垂直なの！」

生徒A子：「ここだよ。」

そんなこともわからんの，せんせ！」

先生：「なんで，そこが頂角なの？」

生徒A子：「ここは頂角ではないでしょ。」

頂角はここだよ。」

せんせ，なんかトンチンカンなこと言ってるね。」

先生：「むっ！」

でも，証明には

$$\angle DAC = \angle EAC$$

(頂角を垂直に二等分するから)

と書いてるじゃないか。

じゃ，これって何？」

生徒A子：「ん！」

だからさ，頂角を垂直に二等分してるから…」

先生：「どこが垂直なの！」

生徒A子：「…！？」

堂々巡りです。

きりがないので，この問題はここで打ちきり。

要するに，「二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に二等分する」という定理をいいかげんに覚えているのですね。

まちがい(その2)

先生：「もそもそねえ。」

生徒A子：「…？」

なに，”もそもそ”言ってるの？」

先生：「…ん？」

そうじゃないでしょ！

そもそも！」

生徒 A 子：「ああ，そう，
どうぞ，続けて！」

先生：「…(—;)！」

そもそも， $BD = CE$ を証明するのに，
どうして， $\triangle ADC$ と $\triangle AEC$ の合同を証明しなければならんの？
 CE はいいとしても， BD は $\triangle ADC$ の辺ではないでしょ？
”三角形の合同⇒対応辺”だから等しいが，証明の流れではないの？」

生徒 A 子：「そうだよ，
センス，賢い！」

先生：「…(—;)！」

じゃあ，どうして $\triangle ADC$ が出てくるわけ？」

生徒 A 子：「 $\triangle AEC$ のすぐ隣にあったし， $\triangle AEC$ と合同っぽいから。」

先生：「 $\triangle ADC$ と $\triangle AEC$ は合同なの？」

生徒 A 子：「うん，図みてよ，ぜったい合同。

ほれ，だれが見ても合同でしょ？」

先生：「それじゃ，問題の条件を全く同じにして
右のような図にしたらどうだ？」

生徒 A 子：「あっ！

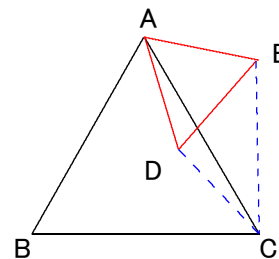
センス，ひきょう！」

先生：「何が？」

生徒 A 子：「かってに問題を変えてしまっ！」

先生：「え？

どこも変えていないでしょ？」



右の図のように，頂点Aが共通な正三角形
 ABC ， ADE をかくとき，
…

ほれ，どこも変えてはいないよ。

これでも，

” $\triangle ADC$ は， $\triangle AEC$ と合同っぽい”の？」

生徒 A 子：「うぐ！

こりゃ，A子の負けでした！

じゃんじゃん！」



そうです。A子の負けですよ。

結局，「合同な三角形の対応辺は等しい」という性質を使って辺の長さが等しいことを証明しようというのに，肝心の証明すべき辺を含んでいない三角形の合同を証明しても，何の意味もないわけです。

しかし，生徒の中には，A子のように，感覚的に合同っぽい三角形が目に入るとその合同を証明して，結論はこじつけることがよくあるのです。

この問題では、証明すべき合同な三角形が与えられていないので、一層そういう誘惑をひきおこします。

- ・証明すべき三角形がはなれていること、
- ・角の相等で、「 60° - 共通角」という計算式を使わなければならないこと

この2点がこの問題の証明を困難なものにしています。



A子の答えは、そもそも前提から間違っているわけですから、添削とかそういう問題ではなく、“ダメ”です。

生徒には、なぜ“ダメ”なのかを上述べたような理由をよ〜く理解させて、証明の流れの基本をしっかりと身につけさせる必要があります。

だれでも証明ができるようになる教材がある！

きょうは、正三角形の諸性質を利用して三角形の合同を証明をする教材を紹介します。

2年生段階では、勝手に証明させると、証明の論理を無視して、恣意的に、目に入ってきた既知の条件から使い始めます。

論理的におかしいことはうすうす分かってはいるのですが、どうすることもできないのでそのまま強引に結論までこじつけます。

だから、この段階では、証明の枠組みをきちんと与え、その手順にそって証明を進める訓練をする必要があります。

この基本的な思考プロセスを習得した後ではじめて、枠をはずし、自分で証明の論理を組立ながら証明をさせるべきなのです。

論理的思考力は、自然発生的に生徒が習得できるのではなく、公式などの知識と同様に外から持ち込んでやらなければ習得できないものです。ここを間違えると、教育の中で学力格差が固定されていくこととなります。

生徒に勝手に考えさせることは、賢い子をより賢くし、賢くない子をより賢くなくする場合だっでありうるのです。

全員、平等にたたきこむ必要のある知識だって、数学にもあるのです。

証明の論理的プロセスを生徒にたたきこむ教材を紹介します。



◀ ● ■ 【 まちがいをさせない教材 】 ■ ● ▶

【中2数学・図形の性質】 No. 4

1 ■ 二等辺三角形の性質（その4） ■ 正三角形 ■

■上の教材は、「教育エッセーMENU Essay_544, コンテンツ欄」よりリンクできます。

➔ [Link ▶ | 教育エッセーMENU |](#)

■演習問題は、数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導をしております。いつからでも受講できます。