

数学の教え方 050

▶ 2023. 11. 25 (土)

【中学2年数学】

図形の性質

「二等辺三角形の性質を利用する証明」の指導

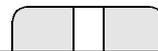
イントロ

合同の証明では、最初に合同を証明する三角形を宣言します。
 例えば、「 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において」などのように。
 そして、この三角形の辺や角の相等を説明していくわけですが…
 わけですが…
 わけ…ではない！
 生徒は、 $AD=AF$ や $\angle ADF=\angle DBF$ などという説明を平気で書きます。
 $\triangle ABC$ の中に AD という辺や $\angle ADF$ などという角はないのです。
 なくとも、平気で書くのが生徒です。
 さて、このような生徒をどのように「善導」しますか、センス？



教育はていねいであること、これ至上命令です。
 てまひまかけ、「リキ」を入れてこそ「教育」です。
 では、「リキ」を入れて、授業をしましょ。
 二等辺三角形の性質を利用した等辺の証明問題です。

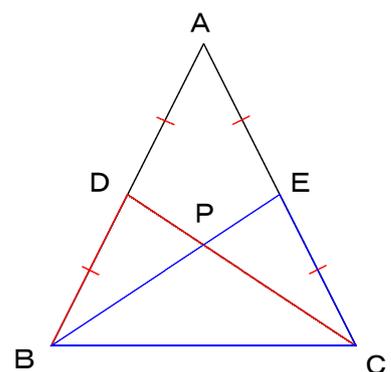
$\triangle ABC$ で $AB=AC$ とする。ABの中点をD、ACの中点をEとし、BE、CDの交点をPとすると、 $PB=PC$ である。これを証明しなさい。



先生：「さて、きょうもA子でいくか？」
 生徒A子：「 $AB=AC$ だから、二等辺三角形でしょ？
 二等辺三角形は得意だから、やってもいいよ！」
 先生：「…！」 (_ - ;) \\
 生徒A子：「

$\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において

{	$AB=AC$ (仮定) …①
{	$BC=BC$ (共通) …②
{	$\angle DBC=\angle ECB$



(二等辺三角形の底角は等しい)…③

①, ②, ③から, 2辺とその間の角が
それぞれ等しいので

$$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$$

合同な三角形では対応する角の大きさは等しいから

$$PB = PC$$

$\triangle PBC$ では, $PB = PC$

底角の等しい三角形は二等辺三角形であるから

$$PB = PC$$



先生: 「ほんとに,

真剣に考えたの?」

生徒A子: 「考えたんよ!

なんか変?」

先生: 「あのね,

こういうのを”シリメツレツ”というの!」

生徒A子: 「(*_*)!

ヤダ~!

シリメクレッだなんて!

教育委員会にいつけると!」

先生: 「ん?

なんのこと言ってんの?」

生徒A子: 「だって, センセ,

”しり, めくれ”って!」

先生: 「なんで, あなたがしりめくるの?」

生徒A子: 「ん?

なんか, あたし, かんちがいしてるみたいね,

ははは!」

先生: 「ようするにだ,

全体的にダメなの!」

生徒A子: 「ダメ?」

先生: 「そう,

ぜ~んぶ, だめ!」

生徒A子: 「SHUN!

Shiku, Shiku…!」(;_~;)」

先生: 「なにも,

泣くほどのことでもないでしょ?」

生徒A子: 「…でも, 」



先生: 「では,

1つ1つなおしていくからね。

いいですか。」

生徒A子: 「は~い!」

先生：「…」

A子の答案の添削

以降は、A子の答案の添削です。

[答 案]

$\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において

$AB = AC$ (仮定) …①

* $\triangle DBC$ に AB という辺はありません。辺 DB を使います。
 $\triangle ECB$ に AC という辺はありません。辺 EC を使います。
 つまり、 $DB = EC$

$BC = BC$ (共通) …②

* 裏返って重なるので対応辺は、 CB です。

$\angle DBC = \angle ECB$

(二等辺三角形の底角は等しい) …③

①, ②, ③から、2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$

合同な三角形では対応する角の大きさは

等しいから

$PB = PC$

* これは $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ の対応角でも対応辺でもない。
 合同を説明した後は必ず対応角か対応辺をおかなければなりません。
 ここでは、対応角として $\angle DCB = \angle ECB$ をとります。

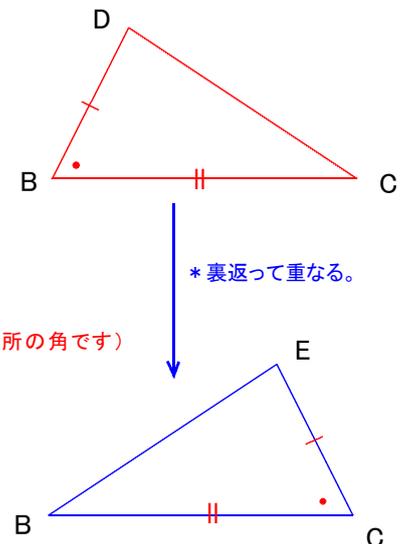
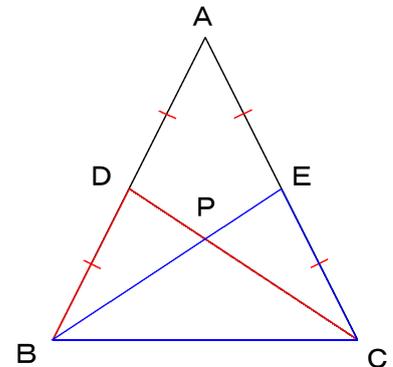
$\triangle PBC$ では、 $PB = PC$

* $\angle DCB = \angle ECB$ を $\triangle PBC$ 内の角に置きかえます。(同じ場所の角です)
 $\angle PCB = \angle PBC$

底角の等しい三角形は二等辺三角形であるから

$PB = PC$

(以上がA子の答案の添削です。)



証明での典型的なまちがい

証明で最初にまちがう典型は、

「合同を証明すべき三角形の設定と合同条件の選定の不一致」

ということです。

上の答案では、

「 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ において」と宣言しながら、

$AB = AC$ (仮定) …①

というように、これらの三角形の中にはない辺を用いて証明の根拠を説明しようとしています。

辺、角ともこのような現象は頻発します。

宣言が生きていません。

なぜ、証明の最初に、このような宣言をするのかという「宣言の機能」を十分に理解していないのですね。

証明の最初に、このような合同な三角形を宣言するのは、
 証明の3つの根拠を示す際に、辺や角を間違えないようにするためなのです。
 例えば、「 $\triangle DBC$ と \sim 」と宣言した場合、証明の個々の条件の左辺にはD, B, Cの文字以外
 を使ってはいけません。
 BCとか $\angle CBD$ などは許されるが、 $AB=\sim$ などAは使ってはいけない、ということです。
 気づかぬうちに宣言の文字以外を使ってしまった場合など、宣言を見返すことでまちがいを自己
 チェックできます。
 証明の構造の1つ1つには、証明の全体の思考過程を制御する重要な意味があります。形式的に
 パターン化されているわけではありません。
 ここを生徒に十分理解させておかないと、証明のパターンが生徒の思考を制御せず、単なる解答
 欄になってしまいます。



合同な三角形の「**辺や角の名称は対応順に**」書かなければなりません。
 これに関するまちがいは超普遍的で、どの生徒も常に犯す危険性をもっております。とりわけ、
 上の問題のように、三角形が裏返っている場合には、生徒にとっては特別に難しいようです。
 このまちがいについては防止法はありません。
回転させたり、裏返したりして確認するしかありません。
 だから、証明の学習に先立って、このような操作を実際にやらせる学習をさせておく必要があります。



3つ目のまちがいの典型は、上の答案では次の部分です。

$\triangle DBC \equiv \triangle ECB$
 合同な三角形では対応する角の大きさは等しいから
 $\underline{PB = PC}$

合同を証明した後には、必ず対応辺か対応角を書かなければなりません。
 PB と PC は、 $\triangle DBC$ と $\triangle ECB$ の**対応角**ではありません。
 このまちがいは、少数派です。
 この生徒は、合同な三角形から結論を導く手順がよくわかっていません。
 「 $\angle PBC = \angle PCB$ 」とするのがまちがいの多数派です。
 「合同な三角形では**対応する角**の大きさは…」と書いていながら、**対応角**を書いていません。
 結論だけが先走っています。
 同一角の相等を説明するわけですが、

- ①まず、合同の対応角を示し、
- ②その後で証明すべき三角形に戻って、
角の相等を言い直さなければなりません。

$\triangle PBC$ では、…

と言い直す三角形を宣言してから、証明を進めることが有効になります。

(* 具体的には、[プリントNo.3 \(3/7\)の解答書](#)をご覧ください。)

同じことをやっているように見えるものだから、
生徒にはこの2段階の証明手順の重要性が理解されないようです。



以上、生徒によく見られる証明のまちがいのいくつかを述べてみました。
どの教室でも、必ず見られるまちがいです。
生徒の答案をチェックするときの参考になることと思います。
教材とともにご利用いただけたらと思います。



■◀●■【 まちがいをさせない教材 】■●▶

【中2数学・図形の性質】 No.3

■ **1** 二等辺三角形の性質 (その3) ■ 二等辺三角形の性質を利用する証明 ■

■上の教材は、「[教育エッセーMENU Essay_543](#), コンテンツ欄」よりリンクできます。

→ [Link ▶ | 教育エッセーMENU |](#)

■演習問題は、[数専ゼミ・山形・東原教室](#)で個人指導をしております。いつからでも受講できます。

「図形の証明」のお勉強は数学専門指導の数専ゼミにかぎる！

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX. (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp