

数学の教え方 046

▶ 2023.11.19(日)

【中学2年数学】

平行と合同

「証明の形式」の指導(4)

イントロ

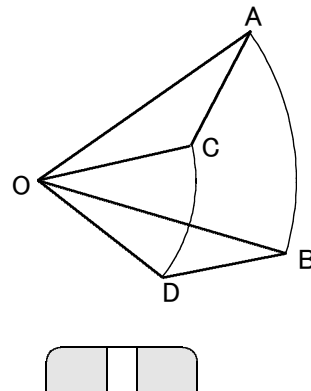
合同条件は、(1) 仮定から、(2) 共通から、(3) 図形の性質からひろっていきます。しかし、この中からでもひろえないことがあります。そういうときには…生徒は、思いつくままにとんでもないところから合同条件をもってきます。きょうは、このような生徒の証明の苦し紛れの支離滅裂、盛者必衰、仏陀入滅…??? なんだかわかりませんが、そんな生徒達の証明の「苦闘」をごらんいただきましょう。



このテーマでは、4回目の授業です。

授業スタート！

図のように、 O を中心とする2つのおうぎ形 OAB 、 OCD がある。
中心角 $\angle AOB$ 、 $\angle COD$ が等しいならば、
 $AC=BD$ である。
これを証明しなさい。



証明に挑戦(その1)

先生：「この問題をやれる人いますか？」

生徒A子：「はい、あたし、やる！」

先生：「…」

生徒A子：「中心角 $\angle AOB$ 、 $\angle COD$ が等しいんね、
おうぎ形？

センセ、三角形はないの？」

先生：「…」

ちゃんとあるでしょ！」

生徒A子：「中心角 $\angle AOB$ ， $\angle COD$ を含む三角形などないよ。

センス，教えてくれたでしょ。

角が等しいのを証明するには，証明する角を含む三角形をさがせて！」

先生：「…

$\angle AOB = \angle COD$ を証明することが問題ではないでしょ？」

頭の隅に残っているものなら何でも動員します！

生徒A子：「でも，“～ならば”だから仮定でしょ？

”仮定はありがたいから迷わず使わせてもらいましょう”

っていつもセンス，言っているでしょ？

どこかで使いたいけど，どこで使うの？」

なんか，先生とA子の論理がかみあいません。

A子自身の論理も一貫性がありません。

A子何を言っているのか自分ではわかってはおりませんな！

笑ってはいけません。

この問題を解くときには，

生徒の頭の中では，このような葛藤が行われているのです。

先生：「…！

だめだ，こりゃ！」

証明に挑戦(その2)

…と，突然

生徒B：「 $AC = BD$ を証明するんだから，

AC ， BD をそれぞれ辺とする2つの三角形は $\triangle AOC$ と $\triangle BOD$

じゃないか，これらの三角形の合同を証明すればいいんだよ。

先生：「ほ～っ！

やってみっか？」

生徒B：「お～し！

$\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ で

仮定より， $\angle AOB = \angle COD$ …①

$AO = BO$ …②

$CO = DO$ …③

①，②，③から，2辺とその間の角がそれぞれ等しいので

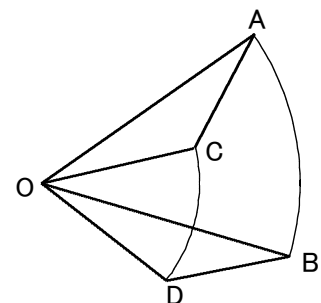
$\triangle AOC \equiv \triangle BOD$

合同な三角形では対応する辺の長さは等しいから

$AC = BD$ 」

先生：「②，③の理由が書いてないでしょ！」

生徒B：「…！」



でも、等しい。」

先生：「どして？」

生徒B：「等しいっばい！」

先生：「ばい？」

証明では”ばい”は、ダ・メ！」

生徒B：「どして、等しいの？」

先生：「そもそも！」

生徒B：「はい！」

先生：「合の手は入れなくていいの！」

生徒B：「ほい！」

先生：「だからさあ、

まあ、いい…。

で、”Oを中心とする2つのおうぎ形OAB, OCD”

と問題に書いてあるでしょ！

これが仮定。

つまり、おうぎ形の半径であるから、

$$AO = BO$$

$$CO = DO$$

となるわけだ。」

生徒B：「ほ～！

センセ、頭いいね！」

先生：「この～っ！

はたくど！

そんなこと、どうでもよろし！

それよりも、

”仮定より、 $\angle AOB = \angle COD$ …①”

は、”犯罪的まちがい”だな。

こんなのどっから盗んできた？」

生徒B：「問題に書いてある。

だから、仮定！」

先生：「でも、証明すべき三角形の $\triangle AOC$ と $\triangle BOD$ の角ではないでしょ！

よそから盗んできて、この三角形の中に入れてはいけない！

さっき、A子がやった同じまちがいでしょ。

何を聞いていたの、

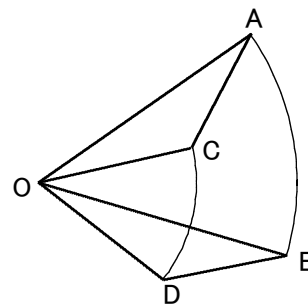
ばっか！」

生徒B：「ほへ！

そうですよ、盗みはいけませんよ！

いいですか、A子さん！」

生徒A子：「ぼけっ！…？」



生徒B, A子に八つ当たりをしていますが, A子は何のことかわかっていません。

実に, 不思議なクラスです。

しかし、よそから盗んでくるとうまくいく問題というのもあります。
相似です。よその相似から辺の比を盗んできて、こっそりその比を利用して辺の長さを求める比例式を作る問題というのがあります。
これは実に楽しい学習です。3年で学習します。

証明の一般的手順

さて、この問題も最大の山場にかかります。
合同条件で、「その間の角がそれぞれ等しい」という場合のその角がどこか、
という問題です。そして、なぜ等しいかという理由を説明する問題です。
ここでは、まったく新しい考え方を覚えなければなりません。

そもそも、合同条件というのは、恣意的に条件を探し回るのではなく、計算プロセス同様、探索手順というのがあります。
この手順にしたがって合同条件を調べてはじめて、理路整然とした証明が可能となります。
これが、生徒が一番ほしがっている「証明の一般的手順」のことです。

「証明の一般的手順」の概要を紹介します。

【合同条件探索のヒューリスティックス】

- (1) 仮定をひろう。
- (2) 共通をひろう。
辺の共有, 角の共有など
- (3) 図形の性質をひろう。
平行線, 対頂角, 角の性質等々
- (4) 辺や角度を計算し, 同じ式で表す

これは、必ず(1) → (2) → (3) → (4) の順に合同条件をさがしていかなければなりません。

詳細は、次の資料をご覧ください。

→Link: [「教育エッセーMENU Essay_538, コンテンツ欄」](#)

この問題では、上の「証明のヒューリスティックス」の(4)を使うことによって証明する問題というわけです。

話が佳境に入りかけたところで、きょうの授業はおしまい。

続きは、次回へ。

今回は、証明の”裏技”, ”秘法”の紹介です

さて、今回はこの角度を計算し、同じ式で表すことで合同条件を示す方法を学習します。
合同の証明方法の最後の”手”, ”裏技”, ”秘法”の紹介です。
教材は、前もって紹介しておきます。

↓ ↓ ↓
■◀●■【 まちがいをさせない教材 】■●▶

【中2数学・平行と合同】 No.2 1

4 証明の形式（その2） ■ 合同条件を式で説明する ■

■上の教材は、「教育エッセーMENU Essay_538, コンテンツ欄」よりリンクできます。

→ Link ▶ | [教育エッセーMENU](#) |

■演習問題は、数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導をしております。いつからでも受講できます。

証明の問題に強くなる数学専門指導の数専ゼミ

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX. (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp