

体験学習をどうぞ 131

▶ 2023. 8. 16 (水)

【高校数学Ⅱ】

一般角の三角関数

三角関数を含む等式の証明

「三角関数を含む等式」を証明する

前回 (No. 8) では、三角関数の相互関係の応用問題として、「三角関数の式の値を求める」問題の学習をしました。

今回は、三角関数の相互関係の応用問題の2回目で、「三角関数を含む等式の証明」について学習します。

次のような問題です。

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \text{ を証明しなさい。}$$

「三角関数!」, 「等式の証明!」…なんか、難しそうですね…

そんなことはありません。前回の応用問題が解けた人には、簡単に解けます。

同じ事をするだけですから。

つまり、前回の応用問題では、

「解法のストラテジーはいたって単純です。

要するに、三角関数の式を、三角関数の相互関係を使って与えられた条件を使った式で表し、そこにその値を代入して計算すれば答えが求まります。」

と、考えました。

今回の応用問題もやはり考え方はまったく同じです。

「要するに、左辺の三角関数の式を、三角関数の相互関係を使って右辺の三角関数で表す。」ことで証明できます。

左辺の三角関数を右辺の三角関数で書きかえる方法

左辺の三角関数の式を右辺の三角関数の式に変換するとき、3つの「三角関数の相互関係」の式を組み合わせ利用しますが、このときの式変形の方法には次の4つのパターンがあります。

- ① $\tan \theta$ は、必ず $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ に変形する。また、 $\frac{1}{\tan \theta}$ は $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ に変形する。
- ② 分数の加減が出てきたら、通分して計算する。
- ③ 展開、因数分解、約分する。
- ④ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ が出てきたら、必ず1に置き換える。

これらは、具体的には次のように使います。

[答 案]

$$(1) \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \text{ の証明}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta (1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

◀式変形②：分数の加減 → 通分

◀式変形③：分子を展開する

◀式変形④： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

◀式変形③：約分する

$$\text{よって, } \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$(2) \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \text{ の証明}$$

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

◀式変形①： $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$, $\frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

◀式変形②：分数の加減 → 通分

◀式変形④： $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\text{よって, } \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

エピソード

「なるほど」でおわってはダメです。

実際に問題を解きながら、三角関数の相互関係の式を使い回してみなければ、使えるようにはなりません。

自転車の乗り方を教えてもらっただけでは、自転車に乗れるようになるわけではないのと同じです。実際に、自転車の乗る練習を繰り返してはじめて自転車を自在に操れるようになります。

プリントNo.9では、練習問題を6題(すべて証明問題)を用意してあります。

これを使って、徹底的に練習をして下さい。

「な～んだ。簡単なんだ。」ということを実感できるようになります。

そうになったら、三角関数など”なめて”かかりましょう。

そうならないときは…

練習がまだ足りません。練習を，何回でも繰り返しましょう。

◀●■【 まちがいをさせない教材 】■●▶

高校数学Ⅱ・一般角の三角関数 No.9

■ **4** 三角関数の相互関係(その3) ■ 三角関数を含む等式の証明 ■

■上の教材は，「教育エッセーMENU Essay_431, コンテンツ欄」よりリンクできます。

→ Link ▶ |教育エッセーMENU|

■演習問題は，数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます。

三角関数を”基本”から積み上げる学習ができる

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX. (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp