

誤答分析集005

▶ 2023.8.10(木)

【中学3年数学】

多項式

「因数分解」の指導をめぐって(2)

共通因数を括り出すとは？

ー割り出すのであって、()の前に移動するのではないー

因数分解の最初の操作は、共通因数を()の外に括り出すことです。

分配法則の逆の操作で、多項式のそれぞれの項に共通の因数を()の外に「割り出す」操作のことです。分配法則がかけ入れるのだから、その反対の操作ですから、「割り出す」のは当然なのですが…

割り出すのだから、()の中にはその共通因数で割った商が残ります。

という操作で共通因数の問題は解決！

…というわけにはいかない生徒がわっと出ます。

見える共通因数と見えない共通因数

共通因数には「見える共通因数」と「見えない共通因数」とがあります。

「見えない共通因数」は、式の中に隠れている共通因数を見えるようにする必要があります。生徒にとっては、その操作に難しさがあるように思えます。

共通因数の型分け

共通因数が「見えるかどうか」という観点から、共通因数を括り出す操作を、次のように型分けしてみました。

(1) 共通因数が単項式

$$2a^2b^3 + 6ab^2$$

* 共通因数は見えますが、よりはっきりと見えるようにするために、

共通部分を単項式の内部で分離させます。

$$2ab^2 \times ab + 2ab^2 \times 3$$

$$= 2ab^2(ab + 3)$$

(2) 共通因数が多項式

① 共通因数が見えるもの

$$\begin{aligned} & (a-b)x + (a-b)y \\ &= (a-b)(x+y) \end{aligned}$$

- *ここでの誤答は、 $(a-b)x + y$ が圧倒的です。
因数分解の意味が分かっていないまちがいです。
 多項式が多項式のままで、因数の積の形に変形されていません。

② 共通因数は見えるが、商が見えないもの

$$\begin{aligned} & (a-b)x - (a-b) \\ &= (a-b)(x-1) \end{aligned}$$

- *ここでの難しさは、 $(a-b)$ の係数が1であることです。
 $(a-b)x$ という形でごまかしてしまう生徒も出ます。
 -は消えるのですね。そんなルールをどこからもってくるやら? (-_-;))
 ①の問題をクリアした生徒でも
 $(a-b)x - 1$ という落とし穴にきちんとはまる生徒もけっこう出ます。

見えない「-1」(共通因数)をあぶり出す!

次は、いよいよ「共通因数が見えない」ものです。
 式をじっと見つめるだけで「固まってしまう」生徒が続出します。
 「指導のうで」の見せ所です。

③ 共通因数が見えないもの (商も見えない)

問題【1】

$$\begin{aligned} & ac + bc + a + b \\ &= (a+b)c + (a+b) \\ &= (a+b)(c+1) \end{aligned}$$

ここでは、1本目の式で $(a+b)$ がかたまりとして「見える」かどうか解けるかどうかの分かれ目になります。

$$\begin{array}{c} \underline{ac + bc} + \underline{a + b} \\ \downarrow \qquad \downarrow \\ c(a+b) + (a+b) \end{array}$$

$(a+b)$ を1つのかたまりとしておさえた瞬間に、それが共通因数だということが見抜けます。

問題【2】

$$\begin{aligned} & (x+y)x - x - y \\ &= (x+y)x - (x+y) \\ &= (x+y)(x-1) \end{aligned}$$

これは、かなり難しい。

次のように考えます。

与式の $(x+y)x$ の部分を見て、 $(x+y)$ というかたまりは共通因数としてくくり出せるかもしれない、と考えます。

すると、式のどこかに $(x+y)$ という因数がつくれる部分があるはずだと考えます。

$-x-y$ に注目します。なぜなら、 x と y という $(x+y)$ と同じ文字でできている多項式であるからです。そこで、各項から -1 を割り出して、 $-(x+y)$ という形の式を作ります。

この操作は、生徒にとっては教師が思っているほど易しくはないようで、分配法則と対比させ、その逆の操作をするのだということを示してあげなければなりません。しかも、 $()$ の中にはわり算をしたときの商が残ることも分かりやすい例を使って納得させておかななくては、生徒はこの操作を理解できません。

$$\begin{aligned}
 \text{(例)} \quad & 2(3x+4y) \\
 & \downarrow \text{分配法則(かっこの中に入れ)} \\
 & = 2 \times 3x + 2 \times 4y \\
 & \downarrow \text{共通因数(かっこの外へ割り出す)} \\
 & = 2 \left(\underset{\text{商}}{3x} + \underset{\text{商}}{4y} \right)
 \end{aligned}$$

ここまでは、なんとかたどり着いた生徒でも、

$$(x+y)x-1$$

とコケる生徒もけっこう出ます。

このようにコケる生徒には、次のようなさらに細かなステップをふんで教える必要があります。

$$\begin{aligned}
 & (x+y)x-x-y \\
 & = (x+y)x-(x+y) \\
 & = \{(x+y)x-1(x+y)\} \\
 & = (x+y)\{x-1\} \quad \left. \vphantom{\{(x+y)x-1(x+y)\}} \right\} \text{この2つのステップを加えます。} \\
 & = (x+y)(x-1)
 \end{aligned}$$

問題【3】

$$\begin{aligned}
 & -ab+ac-c+b \\
 & = ac-ab-c+b \\
 & = a(c-b)-(c-b) \\
 & = (c-b)(a-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * \text{《別解》} \\
 & = -a(b-c)+(b-c) \\
 & = (b-c)(-a+1) \\
 & = (b-c)(1-a)
 \end{aligned}$$

公立レベルでここまでできる生徒はあまりいません。

しかし、ひとつ上の問題をやった後ですと、 $-c+b=-(c-b)$ がイメージできますから、これをもとに、前の2つの項から $(c-b)$ という因数が作れそうだと、という予想を立てることができます。

共通因数の a を括り出すだけでこの因数が見えますから…。

しかし、現実問題としては、 $-ab+ac$ の項を入れかえるという操作に気づかないと $(c-b)$ という因数は見えてきません。だから、ほとんどの生徒はここで足踏みをすることになります。

－ 1を括り出す思考プロセスを形成する教材

このように見えてくると、この種のタイプの因数分解の問題を解くには、
 $-c + b = -(c - b)$ というような「－1を括り出す操作」に習熟していなければならないことがわかります。

だから、共通因数の学習をする前に、「－1を括り出す操作」に習熟させるための学習プログラムを入れておく必要があるのです。

「－1を括り出す操作」に習熟させるための学習教材の紹介です。



中3数学・多項式 No.19s

2 因数分解

体験学習

■ 共通因数（発展問題） ■

■ 「中3数学・多項式」★ 学習計画書 ★

★スマホの機種によっては、「体験学習用教材」へのリンクができないものがあります。その場合には、PCでご覧下さい★

■ 演習問題は、数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます。

■ [ブラウザのバック矢印](#)でこの文書に戻ることができます。

教材No.19sの紹介は、次回になります。

”まちがうことのない”因数分解の方法を指導する

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: (023)633-1086 / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp