数学Essay_406　　数専ゼミ・山形東原教室

応用力の育て方

▶ 2023.7.27(木)

Essay_398の「数学専門塾のきめ細かな指導とは？」で，「きめ細かな指導」とはどのような指導のことなのか，についてお話しました。
今回は，では，「きめ細かな指導」によって，生徒にどのような能力が育つのかについて分析を加えてみたいと思います。

応用力とは何か

その前に，「応用力」とは何かについてお話しておきます。
「応用力」というのは，生まれながらにもっている数学の得意な人の力と考えている人がけっこうおります。
「数学が苦手だから応用力など，とてもとても…」と”投げて”いる人もそれなりにおります。
「応用力」というのは“ある特殊な知識”のことであり，知識ですから学習によってだれにでも習得することができる，というのが応用力の「本質」です。
では，応用力とは，具体的にはどのようなものかについては，
　　コンテンツ別記事 content_04 応用力の指導
の中のいろいろな記事で，具体的な教材を使って説明しております。
”「応用力」はだれにも習得できる”というの”定理”です。
数学の応用力を身につけたい人は，是非，ご覧下さい。

こうした「応用力」観をもとにして，今回の分析をしてみます。

参考書で応用力は身につくのか？

「チャート」とか「Focus Gold」とか「LEGEND」など，いわゆる“網羅系”参考書を勉強している人はけっこういると思いますが，応用力が身についたと実感できていますか。

いきなり「例題」を解ける人はそうおりません。
「例題」を見て，考え方とか答案の書き方を覚え，それを使って「練習」を解いてみます。
その「例題」と「練習」が基礎ー応用の関係で構成されていないならば（応用→基礎となっている場合が多い），とても応用力をつけるために参考書を使うなどということはできません。
（これについては，後で青チャートの問題を使って立証してみます。）

また，すべてとはいいませんが，例題と練習がまったく異なった考え方で解かねばならないようなものもあります。その場合には，別の問題を解くことになります。ことに応用問題で，類題の作成が難しい問題に典型的にみられます。

これでは，応用力をつけるために参考書を使うことはできません。

その参考書はどうなっているか

参考書の悪口を言って“欠席裁判”をしても不公平ですので，実証します。
数Ｉで最初の難関となる因数分解のややこしい問題を学習することにします。
「複２次式の因数分解」の問題です。

２０２１年版の青チャート３８ページ重要例題１９と練習１９の関係を調べてみました。
（難易度は５分の３レベルの問題です。★★★☆☆です。）

「複2次式の因数分解」の解法パターン

その前に「複２次式の因数分解」の問題の解法パターンについて整理しておきます。

複２次式①型　χ^2を１つ文字とみなして因数分解するパターンです。

$$\chi^4+\chi^2-2=(\chi^2)^2+(\chi^2)-2=(\chi^2-1)(\chi^2+2)$$
$$=(\chi+1)(\chi-1)(\chi^2+2)$$

χ^2を１つの文字とみなせばふつうの因数分解で，難しくもなんもありません。

複２次式②型（基本形）　与式を使って平方公式をつくり，和と差の公式で因数分解をする解法です。

なんのことがわかりませんね。実例を紹介します。考え方については学習教材に詳しく説明してあります。

$$4\chi^4-21\chi^2+9$$
$$=(2\chi^2)^2-2\cdot 2\chi^2\cdot 3+(3)^2-9\chi^2$$
$$=(2\chi^2-3)^2-(3\chi)^2$$
$$=(2\chi^2-3+3\chi)(2\chi^2-3-3\chi)$$
$$=(2\chi^2+3\chi-3)(2\chi^2-3\chi-3)$$

複２次式②型（特殊型１）　②型の中で，真ん中の項の符号が与式と異なるパターンです。

$$\chi^4-14\chi^2+1$$
$$=(\chi^2)^2+2\cdot\chi^2\cdot 1+(1)^2-16\chi^2$$
$$=(\chi^2+1)^2-(4\chi)^2$$
$$=(\chi^2+1+4\chi)(\chi^2+1-4\chi)$$
$$=(\chi^2+4\chi+1)(\chi^2-4\chi+1)$$

複２次式②型（特殊型２）　②型の中で，与式に真ん中の項がないパターンです。

$$\chi^4+4$$
$$=(\chi^2)^2+2\cdot\chi^2\cdot 2+(2)^2-4\chi^2$$
$$=(\chi^2+2)^2-(2\chi)^2$$
$$=(\chi^2+2+2\chi)(\chi^2+2-2\chi)$$
$$=(\chi^2+2\chi+2)(\chi^2-2\chi+2)$$

青チャートの例題と練習の問題構成

次に，青チャートの「例題」を型別に分類してみます。

重要例題１９	《解法パターン》
(1)　$\chi^4+4\chi^2+16$	複２次式②型（基本形）
(2)　$\chi^4-7\chi^2y^2+y^4$	複２次式②型（特殊型１）
(3)　$4\chi^4+1$	複２次式②型（特殊型２）

青チャートの「練習」を型別に分類してみます。

練習１９	解法パターン
(1)　$\chi^4+3\chi^2+4$	複２次式②型（基本形）
(2)　$\chi^4-11\chi^2y^2+y^4$	複２次式②型（基本形）
(3)　$\chi^4-9\chi^2y^2+16y^4$	複２次式②型（基本形）
(4)　$4\chi^4+11\chi^2y^2+9y^4$	複２次式②型（基本形）

掲載されている問題の解法パターンを分析すると，
この参考書を勉強することで，学習効果が出るのかどうかがよくわかります。
つまり，すべての解法パターンの学習を十分にできるのかどうかがわかるのです。

例題１９では，②型のすべての型を１つづつとりあげているのに，
練習１９では②型の基本形の問題しかありません。
だから，特殊型の２つの解法パターンについての練習はできません。
じつは，この特殊型が難しいわけですが，この参考書では，その練習ができません。
例題の問題を作った人と，練習の問題を作った人が別なのではないかと思われます。

数専ゼミの「複２次式の因数分解」の学習プログラム

数専ゼミの複２次式の因数分解の学習プログラムを紹介します。（解法パターンも）

		《解法パターン》
No.３４（１／８）	★解法の技術★　…例題のことです。	
	(1)　$\chi^4+\chi^2-2$	①型
	(2)　$4\chi^4-21\chi^2+9$	②型（基本形）
No.３４（２／８）	★理解のチェック★　…例題と同じ問題です。例題を見ないで解きます。	
	(1)　$\chi^4+\chi^2-2$	①型
	(2)　$4\chi^4-21\chi^2+9$	②型（基本形）
No.３４（３／８）	★演習★【１】	
	(1)　$\chi^4-11\chi^2+1$	②型（基本形）
	(2)　$9\chi^4-10\chi^2+1$	②型（基本形）
No.３４（４／８）	★演習★【２】	
	(1)　$4a^4-48a^2+9$	②型（基本形）
	(2)　$\chi^4-14\chi^2+1$	②型（特殊型１）
No.３４（５／８）	★演習★【３】	
	(1)　$\chi^4+\chi^2+1$	②型（基本形）
	(2)　χ^4+4	②型（特殊型２）
No.３４（６／８）	★演習★【４】	
	(1)　$4\chi^4-17\chi^2+4$	②型（基本形）／①型

この問題は，①型と②型の両方の解き方ができますので両方の解き方を比べながら練習します。

（2）　$4\chi^4+1$　　②型（特殊型２）

No.３４（７／８）★演習★【５】

（1）　$\chi^4+6\chi^2y^2+25y^4$　　②型（基本形）

この問題から文字が２種類になります。

（2）　$9a^4-7a^2b^2+b^4$　　②型（基本形）

No.３４（８／８）★演習★【６】

（1）　$\chi^4-7\chi^2y^2+y^4$　　②型（特殊型１）

（2）　$\chi^4+5\chi^2y^2+9y^4$　　②型（基本形）

★

「応用力」の具体的な姿

「複２次式の因数分解」には，①型と②型がありますが，これらは同じ複２次式を因数分解するのですが，考え方はまったくことなり，基礎－応用との関係にはありません。

そこで，今回は，②型に限って，基礎－応用の関係，つまり，応用力をつけるとはどのようなことなのかをみていきます。
以降，「複２次式の因数分解」というときには②型のことを指します。

「複２次式の因数分解」の解法プロセスの本質は，
①第１項と第３項を使って平方公式を作り，
②第２項を鑑みて所与の式の形が変わらないように調整項（平方数）を付け加える
ということです。

<u>複２次式②型（基本形）</u>

$$4\chi^4-21\chi^2+9$$
$$=\underbrace{(2\chi^2)^2-2\cdot2\chi^2\cdot3+(3)^2}_{①}\underbrace{-9\chi^2}_{②}$$
$$=(2\chi^2-3)^2-(3\chi)^2$$
$$=(2\chi^2-3+3\chi)(2\chi^2-3-3\chi)$$
$$=(2\chi^2+3\chi-3)(2\chi^2-3\chi-3)$$

この基本形が「複２次式の因数分解」の基礎にあたります。
本質＝基礎というのは，およそすべての形の「複２次式の因数分解」の解法プロセスに現れる操作である，という意味です。
特殊型１を見てみましょう。

$$\chi^4-14\chi^2+1$$
$$=\underbrace{(\chi^2)^2+2\cdot\chi^2\cdot1+(1)^2}_{①}\ \underbrace{-16\chi^2}_{②}$$
$$=(\chi^2+1)^2-(4\chi)^2$$
$$=(\chi^2+1+4\chi)(\chi^2+1-4\chi)$$
$$=(\chi^2+4\chi+1)(\chi^2-4\chi+1)$$

特殊型１の”特殊性”は，<u>所与の式と平方公式の第２項の符号が逆になる</u>という点です。
特殊型２を見てみましょう。

$\chi^4 + 4$

$= \underbrace{(\chi^2)^2 + 2 \cdot \chi^2 \cdot 2 + (2)^2}_{①} \underbrace{-4\chi^2}_{②}$

$= (\chi^2 + 2)^2 - (2\chi)^2$

$= (\chi^2 + 2 + 2\chi)(\chi^2 + 2 - 2\chi)$

$= (\chi^2 + 2\chi + 2)(\chi^2 - 2\chi + 2)$

特殊型２の”特殊性”は，第２項が所与の式にないという点です。

しかし，ごらんのように，どの特殊型にも①と②のプロセスは存在します。これが本質というものです。だから，この本質プロセスを理解していて，２つの特殊型を解く練習をすることが「複２次式の因数分解」を応用する力をつける，ということになります。

ところが，上の青チャートの問題では，「練習」で，この２つの特殊型を練習する問題がありません。つまり，応用する問題がないのです。だから，少なくとも「複２次式の因数分解」を応用する力を身につけることができません。
他の問題集があるではないか，という人もおります。
では，その問題集の問題の中から，２つの特殊型の問題を抽出できますか。特殊型２については見ればわかります。しかし，特殊型１については，解いてみないとわかりません。目くらめっぽうに手当たり次第解きまくりますか。時間のたっぷりある人ならそれでいいのですが，現役生にとっては，ちと，非能率的なような気もします。

「複２次式の因数分解」の問題だけがそのようになっているのではないか，と思われますが，他の内容についても五十歩百歩です。全体のボリュームの制限のためにやむをえないのです。

専門塾だからできる応用力を育てる指導

それに比較すると，数専ゼミの教材がどれほど，応用力の鍛錬に使えるかが納得できると思います。専門塾というのは教材を自分のところで作りますから，応用力を育てる教材というのを，ボリュームを気にすることなく作成できるのです。

「**専門塾だからできるきめ細かなゆき届いた指導**」と

「**専門塾だからできる応用力を育てる指導**」

は，同義語なのです。

整式　No.３４	**３** 因数分解（その３）
体験学習	■　いろいろな因数分解②　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■演習問題は，数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます■

■高校数学Ⅰ・「整式」★　学習計画書　★

（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）