

体験学習をどうぞ 119

▶ 2023.7.8(土)

【高校数学B】

漸化式と数学的帰納法

nの整式を含む漸化式(その4)

漸化式の第7テーマの「nの整式を含む漸化式」のお勉強です。

恒例により、

漸化式を学ぶときにはいつでも、学習を始める前に、

そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、こちら → [Link](#) | 《漸化式ナビ_Ver3》 |

「nの整式を含む漸化式」の解法パターンの全体像

最初に、「nの整式を含む漸化式」には、どんな形の式があり、どのような解法のパターンがあるかということを一覧表にしてまとめてみました。

プリントNo.

7 I型: $a_{n+1} = 5a_n + 8n + 10$ / (一般形) $a_{n+1} = pa_n + f(n)$

8 II型: $na_{n+1} = 5(n+1)a_n$ / (一般形) $a_{n+1} = f(n)a_n$

$$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$$

9 III型: $na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ / (一般形) $a_{n+1} = f(n)a_n + q$

「nの整式を含む漸化式」には、上のような3つの解法タイプがあります。

今回は、9 III型の解き方を詳しくお勉強します。

「nの整式を含む漸化式」の解法パターンIII型

上の枠内の8 II型と9 III型を比べて下さい。

II型: $na_{n+1} = 5(n+1)a_n$ (一般形) $a_{n+1} = f(n)a_n$

III型: $na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$ (一般形) $a_{n+1} = f(n)a_n + q$

型の特徴はいたって単純で、だれでも見てすぐわかります。

II型に定数項をつけたのがIII型です。

見かけは、たったこれだけのことなのに、解法はとてつもなく複雑になります。

しかし、Ⅲ型はⅡ型の派生形ですから、Ⅱ型で使ったテクニックはすべて使います。
つまり、与式を、
 $n + 1$ 関係の式は左辺に、 n 関係の式は右辺にまとめます。
この形にもっていくために、両辺を同じ式で割ったり、かけたり、分母の平均で割ったり、
分母の形を漸化式の形に強引に変形したり、します。
スーパーテクニックです。
これについては、前回の Essay_387 をご覧下さい。詳しく説明してあります。

解法パターンⅢ型の特徴

Ⅲ型の解き方の決定的な特徴は、このように $n + 1$ 関係の式は左辺に、 n 関係の式は右辺にまとめると、**階差型漸化式**になる、ということです。

だから、

「初項+第 $(n - 1)$ 項までの階差数列の和」を求めることで、求める数列の一般項が求めることができます。

できますが、ここでは重要な2つの基礎技術が要求されます。

①分数を部分分数に分ける技術

②階差数列の和を求める技術

これらの技術は既習事項ですが、ここでもいわゆる新たなスーパーテクニックを使わないと解けない問題も含まれています。

まず、2つの基礎技術を確認しておくこと

だから、数専ゼミでは、Ⅲ型の漸化式を学習する前に、これらの2つの基礎技術の復習をしておきます。

①分数を部分分数に分ける技術…「いろいろな数列」No.6 (1/8)

分数を部分分数に分ける方法は、一般性のある小難しい計算方法もありますが、数列の中で使うときは、式の形をみて瞬時に部分分数にわけなければならないので、速算技術を覚えませす。難しいのは分母の因数が3個の場合ですが、覚えてしまえば2個の場合と同じです。

②階差数列の和を求める技術 …「いろいろな数列」No.6 (3/8)

部分分数は2つの分数の差の形になるわけで、その形のまま Σ をとります。

すると、途中の式がキャンセルしあって消えてくれるわけで、ふつう1番最初の項といちばん最後の項を残して一般項をつくります。

で、うまくいくものだけならば、こんなの100点の人が頻出します。

実は、1つではなく、2つの項とか3つの項が残る問題があるのです。

こうした問題もクリアできる解答フォームを知っていないと、50点しかとれません。

解くときに目を皿のようにして式を見ていなくても、あるフォームで解くと自動的に項が残ってくれる解法というのがあります。

プリントNo.6 (3/8) で紹介しています。

練習問題としては、プリントNo.6 (4/8) (3) , No.6 (5/8) (3) , No.6 (6/8) (3) などです。

基礎技術があれば階差型漸化式はすぐ解ける

これらの基礎技術ができれば、Ⅲ型漸化式の後半部分である階差型漸化式は難なく解けます。実際に解いてみて下さい。「な～んだ」となります。練習問題の3題もやればこの型の漸化式の解法に習熟してしまいます。

エピローグ

ということで、「 n の整式を含む漸化式」の3つのタイプの解法の学習は今回でおしまいになります。次回は、文系の人には最後の漸化式の型になる「数列の和が一般項の漸化式」のお勉強をします。

生徒A子：「う～ん！

いまいち、何をいっているのがよくわかりませんねえ…」

教材だけ見ても、漸化式全体での位置や他の漸化式とのつながりなどがよく理解できません。

しかし、この解説を読みながらプリントの問題を解くと、1問、1問が他の漸化式とどのように関係しているのかがよ～く分かるようになり、漸化式全体の知識がしっかりとしたものになります。つまり、応用力がつく、ということです。

下に紹介する教材を学習しながらこの解説を読んでみてください。

生徒A子：「おう、

アイ、シー！」

あの～っ

アイ、スィー

だと思うのですが…

生徒A子：「ふん！」



漸化式と数学的帰納法 No.9

体験学習

1 漸化式（その6）

■ n の整式を含む漸化式Ⅲ ■

★スマホの機種によっては、体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には、PCでご覧下さい★

■ **演習問題は、数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます** ■

■ **高校数学B・「漸化式と数学的帰納法」★ 学習計画書 ★**

([ブラウザのバック矢印](#)でこの文書に戻ることができます。)

漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: **(023)633-1086** / FAX. (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp