数学Essay_387　　数専ゼミ・山形東原教室

体験学習をどうぞ 118

▶ 2023.6.29(木)

【高校数学Ｂ】

漸化式と数学的帰納法　｜　ｎの整式を含む漸化式（その３）

漸化式の第７テーマの「ｎの整式を含む漸化式」のお勉強です。
恒例により，
漸化式を学ぶときにはいつでも，学習を始める前に，
そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは，こちら　→ Link｜《漸化式ナビ_Ver3》｜

「nの整式を含む漸化式」の解法パターンの全体像

最初に，「ｎの整式を含む漸化式」には，どんな形の式があり，どのような解法のパターンがあるかということを一覧表にしてまとめてみました。

プリントNo.

$\boxed{7}$　Ⅰ型：$a_{n+1}=5a_n+8n+10$　　／(一般形)　$a_{n+1}=pa_n+f(n)$

$\boxed{8}$　Ⅱ型：$na_{n+1}=5(n+1)a_n$　　／(一般形)　$a_{n+1}=f(n)a_n$

$$a_{n+1}=\frac{4n}{3(n+1)}a_n$$

$\boxed{9}$　Ⅲ型：$na_{n+1}=(n+1)a_n+1$　　／(一般形)　$a_{n+1}=f(n)a_n+q$

「ｎの整式を含む漸化式」には，上のような３つの解法タイプがあります。
今回は，$\boxed{8}$　Ⅱ型の解き方を詳しくお勉強します。

「nの整式を含む漸化式」の解法パターンⅡ型

上の枠内の$\boxed{8}$　Ⅱ型の２つの具体的な漸化式をじっとご覧下さい。

Ⅱ型：$na_{n+1}=5(n+1)a_n$

$$a_{n+1}=\frac{4n}{3(n+1)}a_n$$

これまで勉強してきた７つのタイプの漸化式と決定的にちがうところがありますね。
わかりますか…

そうですね，a_nにｎの関数の係数がついていることです。
数多くある漸化式の中でも，このような特徴をもつ漸化式はこれだけです。
１つです。
その意味で，非常に分かりやすい漸化式といえます。

漸化式の基本形に変形する

そこで，このタイプの漸化式の解き方ですが…
《漸化式ナビ_Ver3》を見て，すべての漸化式の形を見つめてみて下さい。
漸化式というのはｎ＋１関係の式は左辺に，ｎ関係の式は右辺にあるのに気づきましたか。
この漸化式の”定め”にしたがえば，
a_nにｎの関数の係数がついているタイプの漸化式も当然，
　　ｎ＋１関係の式は左辺に，ｎ関係の式は右辺にまとめる
ことから始めなければなりません。

この「ｎ＋１関係の式は左辺に，ｎ関係の式は右辺にまとめる」方法には，
いくつかの”手”がありますので，これはこれで覚えなければなりません。
いくつかを紹介しましょう。

①　No.８（１／４）★解法の技術★(1) の場合

$n a_{n+1}=5(n+1)a_n$　の両辺をｎ（ｎ＋１）で割ると，

$$\frac{n a_{n+1}}{n(n+1)}=\frac{5(n+1)a_n}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=5\cdot\frac{a_n}{n}$$

②　No.８（１／４）★解法の技術★(2) の場合

$a_{n+1}=\frac{4n}{3(n+1)}a_n$　の両辺に（ｎ＋１）をかけると，

$$(n+1)a_{n+1}=\frac{4}{3}n a_n$$

③　No.８（４／４）★演習★【２】(1) の場合

$n a_{n+1}=2(n+2)a_n$　の両辺をｎ（ｎ＋２）で割ると，

$$\frac{na_{n+1}}{n(n+2)}=\frac{2(n+2)a_n}{n(n+2)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{n+2}=2\cdot\frac{a_n}{n}$$

左辺にｎ＋２などというわけのわからない式が残りました。これでは解けません。
そこで，両辺を分母の平均値で割ります。これがこのタイプのスーパーテクニックです。
両辺を$\frac{(n+2)+n}{2}=n+1$ で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=2\cdot\frac{a_n}{n(n+1)}$$

これで，等比型漸化式になり，先へ進めます。

④　No.８（４／４）★演習★【２】(2) の場合

$a_{n+1}=\dfrac{2n+3}{2n-1}a_n$　の両辺を2ｎ＋３で割ると，

$\dfrac{a_{n+1}}{2n+3}=\dfrac{2n+3}{(2n-1)(2n+3)}a_n$

左辺に２ｎ＋３などというわけのわからない式が残りました。これでは解けません。

そこで，両辺を分母の平均値で割ります。③と同じのスーパーテクニックです。

両辺を $\dfrac{(2n+3)+(2n-1)}{2}=2n+1$ で割ると，

$\dfrac{a_{n+1}}{(2n+1)(2n+3)}=\dfrac{a_n}{(2n-1)(2n+1)}$

「これで，等比型漸化式になり，先へ進め」ない！

そもそも，等比型漸化式などになっていない。

え？

なっていないですか。

でも，ここで等比型漸化式になってもらわないと，計算は先へ進めません。

そこで，強引になっていただきます。

$\dfrac{a_{n+1}}{\{2(n+1)-1\}\{2(n+1)+1\}}=\dfrac{a_n}{(2n-1)(2n+1)}$

等比型漸化式になったので，先へ進めます。

これもスーパーテクニックといえます。

スーパーテクニックは難問を解くときのツールになりますので，どんなときに，どんなテクニックを使ったらいいのかを整理して覚えておきましょう。

以上が「ｎの整式を含む漸化式」のうちの$\boxed{8}$　Ⅱ型の解き方の全容です。

個々の型の解き方はもちろんですが，型の全体を俯瞰できる力もつけておきましょう。

エピローグ

次回は，「ｎの整式を含む漸化式」のうちの$\boxed{8}$　Ⅲ型の解き方を学習します。

このタイプの漸化式は，階差型漸化式になるし，上で紹介したスーパーテクニックも使う派手な解き方が必要になる問題です。

数学の好きな人には垂涎の問題ですし，数学の嫌いに人には避けて通りたい問題です。

ま，とにかく，やります。

漸化式と数学的帰納法　№８　体験学習

１　漸化式（その６）

■　ｎの整式を含む漸化式Ⅱ　■

★スマホの機種によっては，体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には，PCでご覧下さい★

■高校数学Ｂ・「漸化式と数学的帰納法」★　学習計画書　★

（ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。）