

## 体験学習をどうぞ 117

▶ 2023.6.24(土)

【高校数学B】

漸化式と数学的帰納法

nの整式を含む漸化式(その2)

漸化式の第7テーマの「nの整式を含む漸化式」のお勉強です。

恒例により、

漸化式を学ぶときにはいつでも、学習を始める前に、

そのタイプの漸化式の漸化式全体の中の位置を確認して下さい。

詳しくは、[こちら](#) → [Link](#) | 《漸化式ナビ\_Ver3》 |

### 「nの整式を含む漸化式」の解法パターンの全体像

最初に、「nの整式を含む漸化式」には、どんな形の式があり、どのような解法のパターンがあるかということを一覧表にしてまとめてみました。

プリントNo.

⑦ I型： $a_{n+1} = 5a_n + 8n + 10$       / (一般形)  $a_{n+1} = p a_n + f(n)$

⑧ II型： $n a_{n+1} = 5(n+1)a_n$       / (一般形)  $a_{n+1} = f(n) a_n$

$$a_{n+1} = \frac{4n}{3(n+1)} a_n$$

⑨ III型： $n a_{n+1} = (n+1)a_n + 1$       / (一般形)  $a_{n+1} = f(n) a_n + q$

「nの整式を含む漸化式」には、上のような3つの解法タイプがあります。

今回は、⑦ I型の解き方を詳しくお勉強します。

まず、I型の特徴です。(一般形)  $a_{n+1} = p a_n + f(n)$

・  $a_n$ に係数がついていること。定数項がnの関数であること。

この2点です。

生徒A子：「 $a_n$ に係数がついていないと、どうなるの？」

おう！賢い！

いい質問です。

《漸化式ナビ\_Ver3》を見てください。

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

というのがありますね。

生徒A子：「階差型漸化式だ！」

そうです。  $a_{n+1} - a_n = f(n)$  ですから、階差型漸化式になります。  
だから、これと混乱しないことが、まず大切な1点です。

次に、I型の変種をいくつかあげてみます。

変種によって、解き方の工夫が必要になるので、注意して下さい。

I型の基本形  $a_{n+1} = 5a_n + 8n + 10$

I型の変種①  $a_{n+1} = 5a_n + 8n$

問題の漸化式の定数部分がないタイプです。

②  $a_{n+1} = 2a_n + n^2 - n + 1$

$f(n)$ の部分が3項式であるタイプです。

以上がI型の概要です。

I型の全体のしくみは、こんなふうに行っている、ということだけ理解しておいて下さい。

”それがどしたの？”ということは、解き方を説明すると、”なるほど、そういうふうに理解していると混乱しないんだな”ということがわかります。

## I型の基本形の解法

では、I型の基本形  $a_{n+1} = p a_n + f(n)$  の解き方の説明に入ります。

漸化式  $a_{n+1} = 5a_n + 8n + 10$  …① の一般項を求めてみます。

赤ラインより、  $a_{n+1} = p a_n + f(n)$  型だから、

①を  $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 5(a_n + \alpha n + \beta)$  (仮の等比型漸化式) とおき、これを展開して整理して係数を比較して  $\alpha, \beta$  についての連立方程式を立てて、これを解き、①に代入する。

これで①は、  $a_{n+1} + 2(n+1) + 3 = 5(a_n + 2n + 3)$  となり、

これは数列  $\{a_n + 2n + 3\}$  の等比型漸化式だから、これを解けば数列  $\{a_n\}$  の一般項が求まる。

以上のことを一言で言えば、  $a_{n+1} = p a_n + f(n)$  を見たら、

「仮の等比型漸化式を設定し、与式との係数比較によって  $\alpha$  と  $\beta$  を定める。」  
となります。

これが「 $n$ の整式を含む漸化式」の一般的な解法です。

「仮の等比型漸化式を設定する」ということがこの型の特徴的なテクニックです。

なぜ、そのように設定していいのか、については教材No.7 (1/7) と (2/7) に詳しく説明してありますので、”なるほど”と納得しておいて下さい。

理由を説明できる必要はありません。

解法のプロセス全体を”しこしこ”と練習して覚えるのではなく、

このように、解法の特徴を一言で概括して覚えることが解法のテクニックを覚えるコツです。

## I型の変種①②の解法

I型ですから、「仮の等比型漸化式を設定する」という解法は同じです。  
 違いは、この仮の等比型漸化式の設定のしかたです。  
 基本形と変種の設定のしかたを比較してみます。

I型の基本形  $a_{n+1} = 5a_n + 8n + 10$

仮の等比型漸化式： $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 5(a_n + \alpha n + \beta)$ とおく。

I型の変種①  $a_{n+1} = 5a_n + 8n$

問題の漸化式の定数部分がないタイプです。

仮の等比型漸化式： $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 5(a_n + \alpha n + \beta)$ とおく。

定数部分がないからといって、 $\beta$ の部分を省略してはいけない、というタイプです。結果としては、基本形と同じですが、ないのにつける工夫が必要です。

②  $a_{n+1} = 2a_n + n^2 - n + 1$

$f(n)$ の部分が3項式であるタイプです。

$f(n)$ の部分が3項式だから、置き換える漸化式には、 $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ を使います。  
 だから、置き換える漸化式の右辺は、 $2(a_n + \alpha n^2 + \beta n + \gamma)$ となります。

## エピソード

以上で「 $n$ の整式を含む漸化式I型」の解法のすべてです。

生徒A子：「 $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ は、仮の等比型漸化式を設定する、でいいんだね！」

はい、「本質」をよくおさえましたね。

それが「応用力」の正体です。

応用力が身についた、ということですよ。

生徒A子：「うむ…」



漸化式と数学的帰納法 No.7

体験学習

1 漸化式（その6）

■  $n$ の整式を含む漸化式I ■

★スマホの機種によっては、体験学習へのリンクができないものがあります。その場合には、PCでご覧下さい★

■演習問題は、数専ゼミ・山形・東原教室で個人指導を受けることができます■

■高校数学B・「漸化式と数学的帰納法」★ 学習計画書 ★

(ブラウザのバック矢印でこの文書に戻ることができます。)

## 漸化式に強くなる数専ゼミの数列指導

数専ゼミ・山形東原教室

〒990-0034 山形市東原町二丁目10番8号

TEL: (023)633-1086 / FAX: (023)633-1094

メールアドレス: suusen@seagreen.ocn.ne.jp